

ESTUDIO DE UNA ECUACION
DE DIFUSION RAPIDA

por

ANA RODRIGUEZ SANTA MARIA

Dirigida por J.L. Vazquez Suarez

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Mayo 1989



Ref. B.C. 43.794

Memoria presentada ante la Facultad de Ciencias
de la Universidad Autónoma de Madrid
para optar al grado de Doctor

Cantoblanco, Mayo de 1989.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi reconocimiento más pleno al profesor Juan Luis Vázquez, director de esta tesis, por la acogida que me dispensó en su día; por su inestimable ayuda a lo largo de estos años de estudio; por su constante estímulo, orientación y dedicación, sin todo lo cual no hubiera sido posible la debida consecución de esta memoria.

También, quiero mostrar mi sincero agradecimiento al profesor Miguel Angel Herrero, por despertar en mí el interés en este campo y por sus consejos, que han sido realmente alentadores para la realización de este trabajo.

Es igualmente obligado para mí citar, afectuosamente, al profesor Juan Ramón Esteban, por tantas horas compartidas de estudio y colaboración.

Asimismo, no quiero olvidarme de los profesores del Seminario de Ecuaciones en Derivadas Parciales de la U. A. M., por la atención que generosamente me han prodigado.

INDICE

INTRODUCCION.

CAPITULO I. Soluciones con masa finita del problema de Cauchy.

Sección 1. Existencia de solución.

Sección 2. Caracterización de las soluciones maximales.

Sección 3. Comportamiento asintótico.

Sección 4. Estudio de una capa límite cuando $m \rightarrow -1$.

CAPITULO II. Soluciones con dato inicial general

Sección 1. Existencia de solución.

Sección 2. Unicidad.

CAPITULO III. Un problema mixto bien planteado en $L^1(\mathbf{R})$: Existencia.

Sección 1. Relación entre el flujo y la masa de una solución.

Sección 2. Existencia de solución para datos de flujo constantes.

Sección 3. Existencia de solución para datos de flujo generales.

CAPITULO IV. Un problema mixto bien planteado en $L^1(\mathbf{R})$: Unicidad y Regularidad

Sección 1. Unicidad.

Sección 2. Regularidad con datos de flujos constantes.

Sección 3. Regularidad con datos de flujos generales.

CAPITULO V. Trazas iniciales

Sección 1. Desigualdad de Harnack y existencia de traza inicial.

Sección 2. Existencia de solución maximal cuando el dato inicial es una medida.

Sección 3. Unicidad de soluciones.

INTRODUCCION

0.1. Presentación.

En esta memoria estudiamos la ecuación del calor no-lineal

$$(0.1) \quad u_t = (u^{m-1}u_x)_x, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

en el rango de exponentes $-1 < m \leq 0$.

Esta ecuación ha sido objeto de considerable atención en los últimos años por constituir un modelo para diversos procesos de difusión. Aparte del caso clásico $m = 1$ (ecuación del calor) que es bien conocido, la mayoría de los trabajos se han centrado en la llamada *ecuación de los medios porosos* que corresponde a valores del parámetro $m > 1$. En las aplicaciones es conveniente escribir la ecuación en la forma $u_t = (D(u)u_x)_x$, donde $D(u) = u^{m-1}$ es la difusividad, que en nuestro caso depende de u , la cual se interpreta a su vez como una concentración, temperatura ó densidad según la aplicación de que se trate. En el nivel $u = 0$, $D(u)$ se anula, lo que implica que la ecuación es degenerada parabólica y una de las consecuencias más importantes es la propiedad de propagación finita para las soluciones con soporte compacto, [29].

La situación es completamente diferente para $m < 1$. En este caso la ecuación es singular ya que $D(u) \rightarrow \infty$ cuando $u \rightarrow 0$, por lo que es conocida como *ecuación de difusión rápida*. En particular, para $m = 1/2$ aparece en la Física del Plasma (ley de Okuda-Dawson, [10]); para $m = 0$ en la expansión de una nube de electrones y en la aproximación al límite central de las ecuaciones de Boltzman (modelo de Carleman, [11]). Por último para $m = -1$ la ecuación describe la conducción del calor en hidrógeno sólido, [32].

0.2. Preliminares.

Para $m > 1$, la teoría es bien conocida por los trabajos de Aronson, Bénilan, Caffarelli, Crandall, Friedman, Dahlberg, Kenig, Peletier, Pierre y Vazquez ([2], [7], [8], [9], [14], [17], [18], [22], [31], [35]). Para un resumen general de resultados se pueden consultar los artículos *survey* de Aronson [1] y Peletier [30].

Las propiedades matemáticas de la ecuación de difusión rápida han sido investigadas en el rango $0 < m < 1$ por Aronson y Bénilan [2] y por Herrero y Pierre [25]. En esta referencia se prueba la existencia y unicidad de una solución positiva $u \in C^\infty(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$, para la ecuación generalizada a N -dimensiones

$$u_t = \Delta(u^m)$$

con dato inicial general no negativo.

En lo que respecta a la conservación de la masa

$$M(t) = \int u(x, t) dx ,$$

si el dato inicial es de masa finita, Bénilan y Crandall [7], y Bénilan, Brezis y Crandall [6] prueban que la ecuación $u_t = \operatorname{div}(u^{m-1} \operatorname{grad} u)$ genera un semigrupo de contracciones en $L^1(\mathbf{R}^N)$, verificándose la conservación de la masa sólo para $m > 0$ si $N = 2$, y sólo para $m \geq m(N) = (N - 2)/N$ si $N \geq 3$. Para $N \geq 3$ y $0 < m < m(N)$, aparece un curioso fenómeno: existen soluciones que se extinguen en tiempo finito, [7]. Observamos que formalmente obtenemos en una dimensión el valor crítico $m(1) = -1$.

Para $m = -1$, Herrero ha probado en [23] que no existen soluciones con masa finita en ninguna banda $\mathbf{Q}_T = \mathbf{R} \times (0, T)$, $0 < T \leq \infty$. En [24], el mismo autor extiende este resultado al rango $m < -1$.

0.3. Soluciones explícitas.

Como es bien sabido, el conocimiento de soluciones explícitas para una ecuación facilita su estudio, al proporcionarnos un modelo en la teoría general.

A continuación, describimos las soluciones explícitas que nos servirán de referencia en el rango $-1 < m \leq 0$.

a) *Soluciones de Barenblatt o tipo-fuente* : $\bar{u}(x, t; M)$ correspondientes a una masa de Dirac como dato inicial

$$(0.2) \quad \bar{u}(x, 0; M) = M\delta(x), \quad (M > 0)$$

están definidas en el rango $-1 < m < 1$, ([5], [36]), por

$$\bar{u}(x, t; M) = \left(\frac{2(1+m)t}{At^2\beta + (1-m)x^2} \right)^\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{1-m}.$$

La constante A está determinada en función de m y M . Además, $\bar{u}(\cdot, t; M) \in L^1(\mathbf{R})$ para todo $t > 0$ y se conserva la masa total

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(x, t; M) dx = M$$

de donde se deduce que $A = C_m M^{-2\beta/\alpha}$ con $C_m > 0$ y $\beta = \frac{1}{1+m}$.

b) Tomando $A = 0$ en (0.2), (es decir $M = \infty$), se obtiene

$$(0.3) \quad \bar{u}_\infty(x, t) = \left(\frac{2(1+m)t}{(1-m)x^2} \right)^\alpha$$

que es una solución de (0.1) para $t > 0$ y $x \neq 0$. Notamos también que para $t > 0$ $\bar{u}_\infty(\cdot, t) \notin L^1_{loc}(\mathbf{R})$.

c) *Soluciones de variables separadas*: Una familia biparamétrica de soluciones de la forma

$$(0.4) \quad \bar{u}_{G,T}(x,t) = f(t)g(x)^{1/m}, \quad -1 < m < 0$$

anulándose en tiempo finito ha sido construida en [13]. Las funciones $f(t)$ y $g(x)$ son las soluciones de los problemas independientes

$$f'(t) = \frac{f(t)^m}{m}, \quad f(T) = 0$$

$$(0.5) \quad g''(x) = g(x)^{1/m}, \quad g(0) = G, \quad g'(0) = 0$$

Por tanto, $f(t) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^\alpha (T-t)^\alpha$ para $0 \leq t \leq T$, y se tiene que $g(x)$ es convexa, $g(x) \rightarrow \infty$ si $|x| \rightarrow \infty$ y

$$g'(x)^2 = \frac{2|m|}{1+m} |G^{\frac{1+m}{m}} - g(x)^{\frac{1+m}{m}}|$$

En consecuencia, $|g'(x)| \rightarrow \mu$ y $g(x) \cong \mu|x|$ si $|x| \rightarrow \infty$, siendo $\mu = (2|m|/(1+m))^{1/2} G^{(1+m)/2m}$.

En el caso $m = 0$, la regla es

$$\bar{u}_{G,T}(x,t) = f(t)e^{-g(x)}$$

y se obtiene la solución explícita

$$\bar{u}_{G,T}(x,t) = \mu^2(T-t) \left[1 - \left(\frac{1 - e^{-\sqrt{2\mu}x}}{1 + e^{-\sqrt{2\mu}x}} \right)^2 \right]$$

con $\mu = e^{-G/2}$, siendo $G = g(0)$.

Una cantidad importante cuando caracterizemos a las soluciones será el flujo en el infinito, definido por

$$\phi_{\pm\infty}(t) = \pm \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (u^{m-1}u_x)(x,t).$$

Para estas soluciones se tiene que

$$\phi_{\pm\infty}(t) = -c\mu(T-t)^{\alpha-1},$$

con $c = ((1-m)^m/|m|)^\alpha$ si $0 < m < 1$ y $c = 1$ si $m = 0$. También hacemos notar que estas soluciones $\bar{u}_{G,T}$ tienen masa finita.

La misma construcción es posible para $m \leq -1$, aunque en este caso las soluciones tienen masa infinita para $0 < t < T$. Por el contrario, para $m > 0$ una construcción similar es imposible para $x \in \mathbb{R}$, ya que la ecuación (0.5) sólo admite soluciones definidas en dominios acotados.

0.4. Contenido de la memoria.

Presentamos, de un modo breve, los resultados obtenidos en este trabajo.

En el primer capítulo, estudiamos el Problema de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} u_t = (u^{m-1}u_x)_x \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

siendo u_0 una función no negativa en $L^1(\mathbf{R})$.

Comenzamos, construyendo una solución $u \in C^\infty(\mathbf{Q}) \cap C([0, \infty) : L^1(\mathbf{R}))$, que es positiva y para la que la *masa total* se conserva. Por tanto, cumple las propiedades típicas de las soluciones del caso $0 < m < 1$ (Teorema 1.1).

Seguidamente, probamos que si una solución satisface la condición de decrecimiento

$$(0.5) \quad \begin{aligned} u^m &= o(|x|), & \text{si } |x| \rightarrow \infty, -1 < m < 0 \\ \log u &= o(|x|), & \text{si } |x| \rightarrow \infty, m = 0 \end{aligned}$$

entonces, se tiene el siguiente principio de contracción en $L^1(\mathbf{R})$:

$$\int [u(x, t) - v(x, t)]^+ dx \leq \int [u_0(x) - v_0(x)]^+ dx$$

para u solución cualquiera y v satisficiendo (0.5), (Lema 1.8). Este principio nos prueba que la solución que verifica (0.5) es la *solución maximal* y además, nos establece la *unicidad* en la clase de soluciones que cumplen la condición de decrecimiento (0.5).

Señalamos que esta condición es satisfecha por la solución construida, y que, además, es óptima porque las soluciones explícitas (0.4) que se extinguen en tiempo finito, satisfacen exactamente

$$\bar{u}^m(x, t) = O(|x|)$$

La solución maximal, también puede caracterizarse por cada una de las siguientes propiedades:

- i) conserva la masa total
- ii) satisface condiciones de flujo cero en el infinito

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (u^{m-1}u_x)(x, t) = 0, \quad \forall t > 0$$

- iii) la presión $v = u^{m-1}/(m-1)$, verifica una propiedad de semiconvexidad en la forma

$$v_{xx} \geq -c/t$$

(cf. Teorema 1.9).

Completamos el estudio de la solución maximal analizando el desarrollo asintótico cuando $|x| \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow \infty$. Vemos que se comporta como la solución de tipo-fuente (0.2) que corresponde a la misma masa M (Teoremas 1.10 y 1.11).

Acabamos este análisis en el marco de L^1 , estudiando la extinción cuando $m \rightarrow -1$, de las soluciones maximales $u_m(x, t)$ para un dato inicial u_0 fijo. Demostramos que tienden a 0 uniformemente en conjuntos de la forma $\mathbf{R} \times [\tau, \infty)$, $\tau > 0$ dando lugar a una *capa límite* (Prop. 1.12). Reescalando adecuadamente el tiempo $t = \varepsilon\tau$, con $\varepsilon = (1 + m)$ se observa, utilizando el principio de comparación por desplazamiento de Vazquez, [35], cómo va decreciendo la masa de las soluciones. En concreto, $u_m(x, (1+m)\tau)$ converge débilmente a $(M - 4\sqrt{\tau})_+ \delta(x)$ en el sentido de las medidas de \mathbf{R} , (Teorema 1.13). Y finalmente, probamos cómo se extinguen las soluciones en términos de $\varepsilon = 1 + m$, considerando las funciones $w_\varepsilon(x, \tau) = u_m(x, \varepsilon\tau)^\varepsilon$. Se obtiene que $w_\varepsilon(x, \tau) \rightarrow 1$, si $0 < \tau \leq \tau_0$, siendo $\tau_0 = \varepsilon M^2/16$, la amplitud de la capa límite, (Teorema 1.15).

En el capítulo segundo, se trata el problema con dato inicial en $L^1_{loc}(\mathbf{R})$. Al igual que en caso $0 < m < 1$, no se requieren condiciones de crecimiento sobre u_0 , para la existencia de solución. Para cualquier dato u_0 , localmente integrable, existe una función positiva $u \in C([0, \infty); L^1_{loc}(\mathbf{R})) \cap C^\infty((0, \infty) \times T)$ que es solución del problema, (Teorema 2.1).

Paralelamente a lo que sucedía en L^1 , obtenemos que la condición de decaimiento (0.5) caracteriza también a la solución maximal con masa no finita y por tanto obtenemos unicidad en la clase de soluciones que satisfacen (0.5), (Teorema 2.6).

Incluimos en este capítulo, el conocido efecto regularizante L^1_{loc} en L^∞_{loc} , en particular L^1 en L^∞ si $u_0 \in L^1(\mathbf{R})$, para las soluciones maximales, que nos será de utilidad en el estudio de trazas iniciales. (Lema 2.4).

Sabíamos, debido al conocimiento de soluciones explícitas, que existían soluciones de masa finita con comportamientos totalmente diferentes. En concreto, las soluciones explícitas (0.4), $\bar{u}(x, t) = f(t)g(x)$ no verifican ninguna de las condiciones que nos caracterizan a la solución maximal, en particular el flujo no se anula en el infinito. Por consiguiente, el problema de valores iniciales $u_0(x) = \bar{u}(x, 0)$ tiene al menos dos soluciones diferentes y no está bien planteado. Puesto que la unicidad falla, nos preguntamos cuántas soluciones tiene el problema y de qué modo podemos describirlas.

Respondemos a estas preguntas en los capítulos III y IV, demostrando que el *problema mixto* de tipo Neumann no standard resultante de añadir condiciones de flujo en el infinito al problema (PC):

$$(PM) \quad \begin{cases} u_t = (u^{m-1}u_x)_x \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ -\lim_{x \rightarrow \infty} (u^{m-1}u_x)(x, t) = f(t) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (u^{m-1}u_x)(x, t) = g(t) \end{cases}$$

está bien planteado.

Entenderemos que las condiciones de flujo se toman en el siguiente sentido débil

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\tau}^t (u^{m-1} u_x)(x, s) dx = - \int_{\tau}^t f(s) ds$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{\tau}^t (u^{m-1} u_x)(x, s) dx = \int_{\tau}^t g(s) ds$$

para $0 \leq \tau < t < T$, localmente uniformes en t .

Una primera observación es el hecho de que f y g han de ser funciones no negativas, es decir los flujos deben ser salientes, estando esta condición implicada por la masa finita de la solución, (Prop. 3.1).

Abordamos este problema mixto, construyendo una solución en el marco de la *Teoría de Semigrupos No-Lineales*. Trabajamos primero en el caso particular de datos de flujos constantes, (Teorema 4.7). En el caso general, el dominio del operador $A = -d^2 u^m / dx^2$ depende del tiempo

$$D(A(t)) = \{u \in L^1(\mathbf{R}) : u \geq 0, A(u) \in L^1(\mathbf{R}),$$

$$(u^{m-1} u')(\infty) = -f(t), (u^{m-1} u')(-\infty) = g(t)\}$$

y es necesaria una generalización del método de discretización de Crandall y Liggett [16], (sección 3, capítulo III).

Además, obtenemos el siguiente resultado de dependencia continua respecto de los datos

$$\int [u_1(x, t) - u_2(x, t)]^+ dx \leq \int [u_1(x, 0) - u_2(x, 0)]^+ dx + \int [f_2 - f_1]^+ + [g_2 - g_1]^+ dt$$

es decir, el principio del máximo para este problema mixto, (Prop. 3.9).

En lo que respecta a los datos de flujo, en el caso particular de que f y g sean de clase C^1 y verifiquen una cierta condición de crecimiento, se toman de forma continua. En este caso, decimos que la solución es clásica, (Teorema 4.12).

El hecho de que estas soluciones se puedan extinguir, está dado por la igualdad

$$M(t) = \int u_0 dx - \int_0^t (f + g)$$

que nos relaciona la masa de la solución con las condiciones de flujo. Y si $T < \infty$, obtenemos que $u(., t) \rightarrow 0$ uniformemente, cuando $t \rightarrow T$, (Teorema 4.11).

En el último capítulo, desarrollamos una teoría completa de existencia y unicidad de *trazas iniciales* para la clase de soluciones maximales.

Si llamamos una *buen solución* a aquella que satisface la condición (0.5), nuestro programa comienza demostrando que toda buena solución tiene una traza inicial, que es una medida de Borel localmente acotada, (Teorema 5.4). Para la existencia y unicidad de traza inicial es fundamental la obtención de una estimación integral tipo Harnack, que nos controla la masa en una región finita, (lema 5.2).

A continuación, probamos que para cada medida de Borel localmente acotada existe una buena solución. Lo demostramos, primero para medidas finitas y después, en el caso general. (Teorema 5.5).

En la demostración de la unicidad de soluciones, utilizaremos los resultados de Pierre [31] y las técnicas de Dahlberg y Kenig [17]. (Teorema 5.6). Destacamos aquí, que para las soluciones que verifican $u(x, t) \geq \varepsilon$ para todo t , se tiene unicidad.

Finalmente, acaba el análisis, probando que toda buena solución es efectivamente la solución maximal del Problema de Cauchy con dato inicial una medida de Borel. (Teorema 5.7).

Terminamos este apartado con una última observación. El caso $m = 0$, es decir $u_t = (\log u)_{xx}$ es algo especial debido a la no linealidad logarítmica. Aunque todos los resultados se mantienen, se tiene una serie de dificultades técnicas relacionadas con el desarrollo diferente de $\log(u)$ y u^m , $m < 0$, cuando $u \rightarrow 0$. Ver en particular el lema 1.8.

0.5. Valoración.

Destacamos los resultados que nos parecen más relevantes de esta memoria. El hecho más sorprendente es a nuestro juicio que, aunque se puede desarrollar una teoría completa de soluciones positivas y C^∞ (soluciones maximales) para el problema de valores iniciales con datos inicial de masa finita, y también para el caso de masa localmente finita, no es ésta la única teoría posible debido a la no unicidad de las soluciones. Por tanto, aún cuando se hubiese esperado un comportamiento análogo al del caso $0 < m < 1$, puesto que en ambos rangos la difusividad $D(u) = u^{m-1}$ es singular cuando $u = 0$, encontramos una notable diferencia; porque, justamente, el problema para el que obtenemos unicidad no es el de Cauchy, sino para un problema *mixto* de tipo Neumann con condiciones de flujo en el infinito.

En el caso particular de soluciones con masa finita, encontramos cuatro condiciones equivalentes que permiten caracterizar a las soluciones maximales, siendo la más destacable la condición de semiconvexidad para la presión. Esta propiedad de semiconvexidad ha sido ya utilizada para caracterizar a las *buenas soluciones* de ecuaciones de Hamilton-Jacobi ([4], [28]), pero es este el primer caso en que caracteriza también a las buenas soluciones de una ecuación parabólica.

Señalamos que se obtiene una teoría completa de existencia, unicidad y trazas iniciales para las soluciones maximales.

Nos parece interesante, también, el estudio del límite cuando $m \rightarrow -1$ de las soluciones maximales con masa finita que nos permite explicar la no existencia de soluciones con masa finita para $m \leq -1$ como un fenómeno de capa límite.

0.6. Otros trabajos relacionados.

Describimos brevemente algunos resultados relacionados con los nuestros. Nos referimos en primer lugar al caso $m = 0$.

I. y L. Rubinstein, [33], trabajan con el problema con condiciones de contorno en el infinito

$$\left(\frac{u_x}{u}\right) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} a, \quad u \xrightarrow{x \rightarrow \infty} b$$

para el que encuentran soluciones tipo frente de ondas y establecen su estabilidad asintótica.

Tacák, [34], estudia el mismo problema en un marco totalmente diferente. Lo plantea como un problema de evolución abstracto para el que construye un semigrupo monótono local $\phi_t u_0 = u(\cdot, t)$ en un espacio de Sobolev X . Esta solución es única, local en tiempo y C^∞ .

En ambos casos se trata de soluciones de masa infinita. La existencia de tales soluciones es también consecuencia de la última parte del capítulo 2 de este trabajo.

Para valores del parámetro $m < 1$, M. Bertsch, R. del Paso y M. Ughi en [12] y [13], estudian el problema de valores iniciales para la ecuación satisfecha por la presión $v = u^{m-1}$ en varias dimensiones. Obtienen la no unicidad de soluciones de viscosidad y además la no regularidad de estas soluciones. En la última referencia, estudian el conjunto de positividad de la solución de viscosidad, demostrando la dependencia del tiempo de espera t^* respecto del desarrollo del dato inicial cerca de 0 y del parámetro m . También obtienen soluciones explícitas especiales, en particular las (0.4).

Estos resultados son totalmente independientes de los estudiados en esta memoria, puesto que son consecuencias de la degeneración de la ecuación de la presión para el nivel 0, que corresponde al nivel $u = \infty$ en la ecuación de difusión rápida.

Por último recordamos los resultados de no existencia de Herrero [23] y [24] para $m \leq -1$, mencionados en §0.2

CAPITULO I

SOLUCIONES CON MASA FINITA DEL PROBLEMA DE CAUCHY

Se dedica este primer capítulo al estudio del problema de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} u_t = (u^{m-1}u_x)_x & \text{en } \mathbf{Q} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

con $-1 < m \leq 1$, en el marco de la teoría L^1 de las funciones absolutamente integrables Lebesgue.

En las secciones uno y dos demostraremos la existencia y unicidad de una solución $u \in C^\infty(\mathbf{Q}) \cap C([0, \infty) : L^1(\mathbf{R}))$ del problema (PC), que es positiva y conserva la masa total; es decir,

$$\int u(x, t) dx = \int u_0(x) dx \quad \text{para todo } t > 0.$$

Por tanto, esta solución tiene todas las propiedades que caracterizan a la solución del caso $0 < m < 1$. En la sección dos, probaremos también que nuestra solución es la *solución maximal* del problema (PC) y que puede también caracterizarse por cada una de las siguientes propiedades: condición de flujo cero en el infinito, semiconvexidad uniforme o cierta condición de decrecimiento cuando $|x| \rightarrow \infty$.

El hecho de que la masa se conserve está relacionado con otra importante propiedad de (0.1): las aplicaciones S_t que transforman un dato inicial u_0 en la solución maximal u en el tiempo $t > 0$, forman un semigrupo de contracciones que preservan el orden en el espacio $L^1_+(\mathbf{R})$ de las funciones no-negativas integrables Lebesgue ([15]).

Por otra parte, nuestro parámetro $m \in (-1, 0]$, siendo $m = -1$ un valor crítico porque implica un cambio significativo del comportamiento cualitativo de la solución. En [23] se ha probado que para $m = -1$ no existen soluciones con masa finita en $\mathbf{Q}_T = \mathbf{R} \times (0, T)$, $0 < T \leq \infty$. La demostración se basa en el uso de una transformación de Backlund, que transforma la ecuación para $m = -1$ en la ecuación del calor ($m = 1$), [23], [32]. Este resultado se extiende en [24] al rango $m < -1$, mediante la conversión a $m > 1$.

Contribuiremos en la última sección a este resultado de no existencia, estudiando el límite $m \rightarrow -1$ en el problema (PC), con dato inicial u_0 fijo. En particular, demostraremos que la solución $u_m(x, t)$ converge a 0 cuando $m \rightarrow -1$ uniformemente en conjuntos de la forma $\mathbf{R} \times [\tau, \infty)$, $\tau > 0$, dando lugar a una *capa límite*. Para u_0 acotada, probaremos que la amplitud de la capa es precisamente $\varepsilon M^2/16$, siendo M la masa total y $\varepsilon = m + 1$.

SECCION 1.

Se inicia el estudio del problema (PC), demostrando la existencia de una clase de soluciones y describiendo sus propiedades.

TEOREMA 1.1.

Sea $u_0 \in L^1(\mathbf{R})$, $u_0 \geq 0$ en c.t.p. y $u_0 \not\equiv 0$. Entonces, existe una función positiva

$$u \in C^\infty(\mathbf{Q}) \cap C([0, \infty) : L^1(\mathbf{R}))$$

verificando:

- i) $u_t = (u^{m-1}u_x)_x$ en \mathbf{Q}
- ii) $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ en $L^1(\mathbf{R})$ cuando $t \rightarrow 0$
- iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx$ para todo $t > 0$;
es decir, la masa total se conserva.

Efectuaremos la demostración del Teorema mediante el procedimiento típico de aproximar el dato inicial por una función estrictamente positiva para eliminar la singularidad de la ecuación.

Después, pasaremos al límite, con la ayuda de adecuadas estimaciones a priori. Para ello, es conveniente usar el cambio de variable

$$v = \frac{1}{m-1} u^{m-1}$$

normalmente utilizado en el caso de los medios porosos.

Notamos que al ser $m < 1$, v es negativa y tiende a $-\infty$ si u tiende a 0. Además v satisface la ecuación

$$v_t = (m-1)vv_x + v_x^2$$

siendo el coeficiente $(m-1)v$ positivo, aunque puede degenerar o ser singular, dependiendo del rango de valores de u .

Facilitamos la demostración del Teorema, estableciendo una serie de lemas preliminares. En todos ellos, entenderemos que reemplazamos u^m/m por $\log(u)$ si $m = 0$.

LEMA 1.2.

Sea $u_0 \in C^\infty(\mathbf{R})$ una función con derivadas acotadas de todos los órdenes y tal que

$$0 < \delta \leq u_0(x) \leq M_0$$

Existe una única solución $u \in C^\infty(\mathbf{Q})$ del problema (P), verificando en \mathbf{Q} :

$$(1.1) \quad 0 < \delta \leq u(x, t) \leq M_0$$

y

$$(1.2) \quad \left| \frac{\partial u^m(x, t)}{\partial x} \right| \leq \| (u_0^m)' \|_\infty$$

Como es usual, notamos por $\|f\|_p$ la norma L^p de una función medible real f , $1 \leq p \leq \infty$. Si $m = 0$, escribiremos $u^{-1}u_x$ en vez de $(u^m)_x$ en (1.2).

DEMOSTRACIÓN:

Si efectuamos el cambio de variable $w = \frac{1}{-m}u^m$, el problema que resulta es

$$(1.3) \quad \begin{cases} w_t = (-mw)^{1-1/m} w_{xx} & \text{en } Q \\ w(x, 0) = w_0(x) = \frac{-1}{m} u_0(x)^m & \text{para } x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

y (1.1) se convierte en

$$0 < M_1 = \frac{M_0^m}{-m} \leq w_0(x) \leq \frac{\delta^m}{-m} = M_\delta$$

Introducimos una función $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ tal que: $\phi(r) = (-mr)^{1-1/m}$ si $r \geq M_1$, $\phi(r) = M_0^{m-1}/2$ si $r \leq 0$ y $\phi(r)$ es creciente cuando r crece desde 0 hasta M_1 . Por tanto, para cualquier $T > 0$ la teoría de E.D.P. parabólicas cuasilineales [27], nos asegura la existencia y unicidad de una solución

$$w = w(x, t) \in C_{x,t}^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\mathbf{R} \times [0, T]), \quad 0 < \gamma < 1$$

del problema

$$\begin{cases} w_t = \phi(w) w_{xx} & \text{en } \mathbf{R} \times (0, T] \\ w(x, 0) = w_0(x) & \text{para } x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

con $|w(x, t)| \leq M_1$ en $\mathbf{R} \times [0, T]$. Por el principio del Máximo:

$$0 \leq M_1 \leq w(x, t) \leq M_\delta \quad \text{en } \mathbf{R} \times [0, T]$$

y $w(x, t)$ satisface (1.3) por la definición de ϕ .

La estimación

$$|w_x(x, t)| \leq \|w'_0\| \quad \text{en } \mathbf{R} \times [0, T]$$

es una consecuencia del Principio del Máximo aplicado a la ecuación que satisface $z = w_x$

$$z_t = \phi(w) z_{xx} + \phi'(w) z z_x$$

y utilizando el habitual argumento de recurrencia (bootstrap), se establece que $w \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0, T])$. Finalmente, al ser $u = (-mw)^{1/m}$, se verifican claramente las conclusiones del lema.

Si $m = 0$, $w = \log(u)$ y (1.3), (1.4) se convierten en

$$\begin{cases} w_t = e^{-w} w_{xx} \\ w(x, 0) = w_0(x) = \log u_0(x) \end{cases}$$

y

$$\log(\delta) \leq w_0(x) \leq \log(M_0).$$

El resto del argumento se realiza sin ningún cambio. ■

LEMA 1.3.

Si $u_0(x)$ y $u(x, t)$ son como en el Lema 1.1, la función $v = \frac{u^{m-1}}{m-1}$ verifica las siguientes estimaciones en \mathbf{Q}

$$(1.5) \quad v_{xx} \geq \frac{-1}{(1+m)t}$$

y

$$(1.6) \quad \frac{-u}{(1+m)t} \leq u_t \leq \frac{u}{(1-m)t}$$

DEMOSTRACIÓN:

Estas desigualdades son bien conocidas para $0 < m < 1$, [2]. La técnica para probar (1.5) consiste en escribir la ecuación que satisface $p = v_{xx}$, es decir:

$$p_t = (m-1)vp_{xx} + 2mv_xp_x + (1+m)p^2$$

y observar que la función $\bar{p} = -\beta/t$ es la solución con valor inicial $\bar{p}(x, 0) = -\infty$. Debido a que v y v_x están acotadas en \mathbf{Q} y $p(x, t)$ está acotada inferiormente para $0 < t < T$, podemos aplicar el Principio del Máximo y así obtenemos (1.5).

Ya que:

$$v_t = (m-1)vp + v_x^2 \geq (m-1)vp$$

(1.5) implica $v_t \geq -\frac{(m-1)v}{(1+m)t}$, lo cual equivale a la primera desigualdad de (1.6). La segunda desigualdad se obtiene aplicando de nuevo, como en [2], el Principio del Máximo a $q = u_t/u$ y $\bar{q} = \alpha/t$ en la ecuación satisfecha por q :

$$q_t = (m-1)vq_{xx} + 2mv_xq_x - (1-m)q^2.$$

Para una función de $L^1(\mathbf{R})$, la acotación (1.5) implica las siguientes estimaciones puntuales:

LEMA 1.4.

Sea $U = U(x) \in L^1(\mathbf{R})$ una función real positiva y tal que $V = \frac{U^{m-1}}{m-1}$ satisface

$$(1.7) \quad V_{xx} \geq -k \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbf{R})$$

con $k > 0$. Entonces:

a) $U \in L^\infty(\mathbf{R})$ y

$$(1.8) \quad U(x) \leq c(m) k^\beta \|U\|_1^{2\beta}$$

con $c = c(m) > 0$

b) $U(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ y

$$(1.9) \quad U(x) \geq (\|U\|_\infty^{m-1} + \frac{(1-m)k}{2}(x - \bar{x})^2)^{-\alpha}$$

con \bar{x} verificando $U(\bar{x}) = \|U\|_\infty$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea x_0 un punto en el que $V(x)$ alcanza un máximo local y sean $V_0 = V(x_0)$ y $U_0 = U(x_0)$. Integrando (1.7) obtenemos

$$(1.10) \quad V(x) \geq V_0 - \frac{k}{2}(x - x_0)^2$$

por lo que

$$(1.11) \quad U(x) \geq (U_0^{m-1} + \frac{(1-m)k}{2}(x - x_0)^2)^{-\alpha}.$$

Ahora, la integración sobre la recta real nos proporciona

$$\|U\|_1 \geq C(m)k^{-1/2}U_0^{1/2\beta}$$

lo que implica la parte a) del lema.

Por otra parte, para cualquier $x \in \mathbf{R}$, (1.10) es válido ó bien a la derecha ó bien a la izquierda de x_0 , dependiendo del signo de $v'(x_0)$.

En consecuencia, para $a > 0$

$$(1.12) \quad \int_{x_0-a}^{x_0+a} U(x)dx \geq \int_0^a (U_0^{m-1} + \frac{(1-m)k}{2}y^2)^{-\alpha}dy = O(U_0^{1/2\beta})$$

Como $U \in L^1(\mathbf{R})$, se tiene que $U(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ y (1.9) se deduce de modo inmediato. ■

De las estimaciones (1.9) y (1.10), se obtienen las siguientes consecuencias :

COROLARIO 1.5.

Sea $u(x, t)$ una solución de (0.1) en \mathbf{Q}_T , $T > 0$, que verifica $u(\cdot, t_1) \in L^1(\mathbf{R})$ para $0 < t_1 < T$ y (1.5) para $t = t_1$. Existen $\bar{x} \in \mathbf{R}$ y $M > 0$, dependiendo posiblemente de t_1 , tales que

$$u(x, t_1) \geq \bar{u}(x - \bar{x}, t_1; M)$$

siendo \bar{u} la solución de Barenblatt (0.2).

Estos resultados serán utilizados en la tercera sección cuando estudiemos el comportamiento asintótico de las soluciones.

A continuación probamos un principio de contracción para las soluciones construidas en el Lema 1.2.

LEMA 1.6.

Supongamos que $u_0(x)$ y $\hat{u}_0(x)$ satisfacen las hipótesis del Lema 1.2, y sean $u(x, t)$, $\hat{u}(x, t)$ las correspondientes soluciones de (PC). Si $u_0 - \delta, \hat{u}_0 - \delta \in L^1(\mathbf{R})$, se verifica que

$$u(\cdot, t) - \delta, \hat{u}(\cdot, t) \in L^1(\mathbf{R})$$

y

$$(1.13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x, t) - \hat{u}(x, t)]_+ dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} [u_0(x) - \hat{u}_0(x)]_+ dx$$

para cada $t > 0$. En particular

$$(1.14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t) - \delta| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(x) - \delta| dx.$$

DEMOSTRACIÓN:

Se basa en el hecho de que la solución $w(x, t)$ de (1.3) es el límite de las soluciones $w_n(x, t)$ de la siguiente sucesión de segundos problemas de contorno: Para cada $n = 3, 4, \dots$ definimos la función de corte $\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\varepsilon_n(x) = 1$, si $|x| \leq n - 2$, $\varepsilon_n(x) = 0$ si $|x| \geq n - 1$.

Si tomamos $u_{0,n} = \delta + \varepsilon_n(x)(u_0(x) - \delta)$, $w_n(x, t)$ es la solución del problema

$$\begin{cases} w_{n,t} = \phi(w_n)w_{n,xx} & 0 < t \leq T, |x| < n \\ w_{n,x}(\pm n, t) = 0 & 0 < t < T \\ w_n(x, 0) = \frac{1}{-m}u_{0,n}(x)^m & |x| < n. \end{cases}$$

La convergencia de $w_n(x, t)$ a $w(x, t)$ está demostrada en [27, Cap.V, §8] para una sucesión de problemas de contorno de primer orden. Y la misma demostración se aplica, con pequeños cambios, en el caso de las condiciones de contorno de tipo Neumann (ver también [27, Cap.V, §7]).

Ahora, si definimos $u_n(x, t) = (-mw_n(x, t))^{1/m}$, u_n satisface

$$\begin{cases} u_{n,t} = (u_n^m/m)_{xx} & 0 < t \leq T, |x| < n \\ (u_n^m/m)_x(\pm n, t) = 0 & 0 < t \leq T \\ u_n(x, 0) = u_{0,n}(x) & |x| \leq n. \end{cases}$$

De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-n}^n u_{n,t}(x, t) dx &= 0, \quad y \\ \int_{-n}^n (u_n(x, t) - \delta) dx &= \int_{-n}^n (u_{0,n}(x) - \delta) dx \leq \|u_0 - \delta\|_1 \end{aligned}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, aplicando el Lema de Fatou, se obtiene (1.14). La demostración de (1.13) se efectúa de un modo enteramente similar. ■

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.1:

Etapa 1. Supongamos que $u_0 \in L^1 \cap L^\infty \cap C^\infty(\mathbf{R})$, $u_0(x) > 0$ y u_0^m es Lipschitz continua. Para cada $\delta > 0$, definimos $u_{0,\delta} = u_0 + \delta$, que cumple las hipótesis de los Lemas 1.1 y 1.5. En particular, $u_{0,\delta}^m$ es Lipschitz continua independientemente de δ , ya que

$$|(u_{0,\delta}^m)'(x)| = \left| \left(\frac{u_0(x)}{\delta + u_0(x)} \right)^{1-m} (u_0^m)'(x) \right| \leq \|(u_0^m)'\|_\infty$$

Para cada $\delta > 0$, sea $u_\delta(x, t)$ la solución con dato inicial $u_{0,\delta}$. Por (1.1), (1.2) y los argumentos de compacidad de [4] deducimos que, (para alguna (sub)-sucesión, que también notamos por u_δ), $u_\delta \rightarrow u$ uniformemente en subconjuntos compactos de \bar{Q} .

En particular,

$$(1.15) \quad \left| \frac{\partial u^m}{\partial x}(x, t) \right| \leq \|(u_0^m)'\|_\infty \quad \text{en } \bar{Q}$$

lo que indica que en c.t.p. $t > 0$, $u^m(\cdot, t)$ es continua y como $m < 0$ en c.t.p. $t > 0$, $u(x, t) > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

Puesto que la función $t \rightarrow t^{1/(1+m)} u(x, t)$ es no decreciente por (1.6), $u(x, t) > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$ y $t > 0$. La positividad de u unida a $u \in C(\bar{Q})$, nos proporciona $u \in C^\infty(\bar{Q})$ por argumentos standard.

Cuando $\delta \rightarrow 0$, por (1.14) tenemos que $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbf{R})$ y para cada $t > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx$$

Seguidamente, probamos que el flujo satisface

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{u^m}{m} \right)_x(x, t) = 0, \quad \text{para cada } t > 0$$

Para ello, fijamos $t > 0$ y consideramos la función

$$\psi : x \rightarrow \left(\frac{u^m}{m} \right)_x(x, t) + \frac{1}{(1+m)t} \int^x u(y, t) dy$$

Debido a (1.6), ψ es no decreciente y como $u(\cdot, t)$ es integrable, existen los siguientes límites

$$\psi_\infty(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{u^m}{m} \right)_x, \quad \psi_{-\infty}(t) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{u^m}{m} \right)_x$$

Dado que u^m es positiva, $\phi_{\pm\infty}(t) \in [-\infty, 0]$. Supongamos que uno de los dos, por ejemplo ϕ_∞ , no se anula. Obtenemos en consecuencia que $u^m(x, t) \geq |x|$, para $x > 0$ suficientemente grande. Por otra parte, si aplicamos la estimación (1.9) a la función $u(\cdot, t)$:

$$(1.16) \quad u^m(x, t) = O(|x|^{\frac{2m}{m-1}})$$

cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Si $-1 < m < 0$, tenemos que $2m/m - 1 \in (0, 1)$ y (1.6) contradice el crecimiento lineal de u^m . Por ende, el flujo debe ser cero. Cuando $m = 0$, la contradicción se da entre $-\log(u) \geq c|x|$ y $-\log(u) = 0(\log|x|)$, por lo que el flujo es cero también en este caso.

Si consideramos ahora u_t , de (1.6) obtenemos que para cada $t > 0$ fijo, $u_t(\cdot, t) \in L^1(\mathbf{R})$. Además

$$\int_{-R}^{+R} u_t(x, t) dx = \left(\frac{u^m}{m}\right)_x(R, t) - \left(\frac{u^m}{m}\right)_x(-R, t)$$

y si $R \rightarrow \infty$,

$$\int u_t(x, t) dx = 0$$

y $\|u_t\|_1 = 0(1/t)$.

Ahora, tenemos que $u = u(t)$ es en c.t.p. diferenciable como función de $(0, \infty)$ en $L^1(\mathbf{R})$. Por tanto, $u \in C((0, \infty); L^1(\mathbf{R}))$, la masa se conserva, es decir

$$\int u(x, t) dx = \int u(x, s) dx$$

para $t > s > 0$, y

$$\int |u_t(x, t)| dx \leq \frac{2\|u_0\|_1}{(1+m)t}.$$

Finalizamos esta etapa, probando que $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ en $L^1(\mathbf{R})$ cuando $t \rightarrow 0$. Debido a la propiedad de invariancia por traslaciones de la ecuación y por (1.13), tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+h, t) - u(x, t)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(x+h) - u_0(x)| dx$$

Por consiguiente $\{u(\cdot, t)\}_{t>0}$ es una familia precompacta en $L^1_{loc}(\mathbf{R})$ y para cualquier sucesión $t_n \rightarrow 0$, existe una subsucesión a lo largo de la cual la familia converge en $L^1(\mathbf{R})$. Ahora bien, $u \in C^\infty(\overline{\mathbf{Q}})$ y $u(x, 0) = u_0(x)$, por lo que la familia converge a u_0 .

Etapas 2. Sea $u_0 \in L^1(\mathbf{R})$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$ y supongamos, además, que está acotada. Aproximamos u_0 por una sucesión $u_{0,n}$ que satisface las propiedades de la etapa anterior en la forma siguiente: Sea $\{\rho_n(x)\}$ una sucesión de núcleos regularizantes y sea $\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tal que $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $\varepsilon(x) = 1$ para $|x| \leq 1$, $\varepsilon(x) = 0$ para $|x| \geq 2$. Definimos $\varepsilon_n(x) = \varepsilon(x-n)$ para $|x| \geq n$, $\varepsilon_n(x) = 1$ para $|x| < n$, $n = 1, 2, \dots$. Entonces, si tomamos

$$u_{0,n}(x) = \varepsilon_n(x) \left(\int \rho_n(x-y) u_0(y) dy \right) + (1 - \varepsilon_n(x)) |x|^{-\gamma}$$

con $\gamma = 2/(1-m) > 1$, podemos resolver el problema (PC) con dato inicial $u_{0,n}$ obteniendo una solución u_n .

Ahora, utilizando los argumentos de la etapa anterior, hacemos tender $n \rightarrow \infty$ para obtener una solución u de (PC).

Sin embargo, existe una diferencia ya que $\|(u_{0,n}^m)'\|_\infty$ en principio depende de n . Por ello, la estimación (1.2) no se puede utilizar para hacer el paso al límite cuando $n \rightarrow \infty$. En su lugar, consideramos la siguiente

$$\begin{aligned} |u_{n,x}(x,t)| &= \left| \frac{u_n(x,t)(u_n^m)_x}{m} \right| \leq C(m) \|u_{0,n}\|_\infty^{1-m} \|u_{0,n}\|_1 / t \\ &\leq C(m) (\|u_0\| + 1) (\|u_0\|_1 + C(m)) / t \end{aligned}$$

en donde hemos hecho uso de (1.6) para estimar $(u^m)_x$.

Además, se tiene

$$|u_{n,t}(x,t)| \leq \|u_{0,n}\|_1 / t \leq C(m) (\|u_0\|_1 + 1) / t.$$

Finalmente, $u \in C([0, \infty]; L^1(\mathbf{R}))$ y $u(t) \rightarrow u_0$ si $t \rightarrow 0$ en $L^1(\mathbf{R})$, ya que la familia $\{u_n\}$ toma sus datos iniciales de forma continua en $L^1(\mathbf{R})$ y, además, converge a u uniformemente en t debido a la propiedad (1.13) de contracción en $L^1(\mathbf{R})$.

Etapas 3. Concluimos la demostración eliminando la restricción $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R})$. Dado cualquier dato inicial u_0 , lo aproximamos por la sucesión $u_{0,n}(x) = \min\{u_0(x), n\}$ y resolvemos el problema (PC) con $u(x, 0) = u_{0,n}(x)$ mediante la segunda etapa.

Como $\|u_{0,n}\|_1 \leq \|u_0\|_1$, por (1.5) y (1.8), obtenemos

$$u_n(x,t) \leq C(m) \|u_0\|_1^{2\beta} t^{-\beta}$$

Por tanto, $\{u_n\}$ está uniformemente acotada en $L^\infty(\mathbf{Q}_\tau)$ para $\tau > 0$ y existe $u = \lim u_n$. Siguiendo los argumentos de la etapa anterior, se demuestra que u es una solución de (PC). ■

OBSERVACIÓN.

Con la demostración anterior, no sólo hemos probado la existencia de una solución de (PC), si no, también, una serie de propiedades que nos serán de gran utilidad a la hora de estudiar su unicidad.

Estas propiedades las enunciamos en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.7.

La solución del Teorema 1.1 verifica:

- i) $v_{xx} \geq \frac{-1}{(1-m)t}$
- ii) Para cada $t > 0$, $u_t(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbf{R})$, $\int u_t dx = 0$ y $\frac{-u}{(1+m)t} \leq u_t \leq \frac{u}{(1-m)t}$
- iii) Para cada $t > 0$, $u(x, t) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, y $u(x, t) \leq C(m) \|u_0\|_1^{2\beta} t^{-\beta}$, siendo $C(m)$ la constante que aparece en esta desigualdad para las soluciones de tipo-fuente.
- iv) $\frac{1}{u(x, t)} = O(|x|^{2\alpha})$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, uniformemente en $t > \tau > 0$
- v) $\phi_{\pm\infty}(t) = 0$ y $|(u^m)_x| \leq \frac{2|m|}{1+m} \frac{\|u_0\|_1}{t}$
- vi) Sean u, \hat{u} soluciones y $0 \leq s < t$, entonces se tiene $\int_{-\infty}^{+\infty} [u(x, t) - \hat{u}(x, t)]_+ dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x, s) - \hat{u}(x, s)]_+ dx$.
En particular, $u_0 \leq \hat{u}$ implica que $u \leq \hat{u}$ en \mathbf{Q} .

Cerramos esta sección 1, con una nota sobre el Teorema 1.1:

La solución anterior del problema (PC) también puede ser obtenida en el marco de la Teoría de Semigrupos No-Lineales. Crandall y Evans demuestran en [15] que el operador elíptico

$$A(u) = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{u^m}{m} \right)$$

con dominio

$$D(A) = \{u \in L^1 : u > 0, (u^m)'(\pm\infty) = 0, A(u) \in L^1(\mathbf{R})\}$$

es un operador acretivo en $L^1(\mathbf{R})$.

El Teorema de Generación de Semigrupos (cf. [16],[20]), nos proporciona una solución generalizada $u \in C([0, \infty]; L^1(\mathbf{R}))$ de (PC) llamada solución mild, cuando $u_0 \in \overline{D(A)}$ (el cierre de $D(A)$ en $L^1(\mathbf{R})$) y la aplicación $S_t : u_0 \rightarrow u(t)$ es una contracción en $L^1(\mathbf{R})$.

La solución construida en el Teorema 1.1 es fuerte y, por consiguiente, es la única solución mild de (CP), (Regularity Theorem ii) [20]. Como el dato inicial pertenece a $L^1_+ = \{u \in L^1; u \geq 0, u \not\equiv 0\}$, y $u(t) \in D(A)$ tiende a u_0 cuando $t \rightarrow 0$, concluimos $\overline{D(A)} = L^1_+$.

SECCION 2.

En esta sección derivaremos criterios que nos van a permitir caracterizar unívocamente las soluciones construidas en el teorema 1.1. Precisemos que por una solución de la ecuación (0.1) entenderemos siempre una función positiva $u \in C^\infty(\mathbf{Q}_T)$, satisficiendo la ecuación (0.1) en todo punto de \mathbf{Q}_T . Una solución de (PC) con dato inicial $u_0 \in L^1(\mathbf{R})$ será una solución de (0.1), tal que $u(t) = u(\cdot, t) \in L^1(\mathbf{R})$ para $0 < t \leq T$ y $u(t) \rightarrow u_0$ en $L^1(\mathbf{R})$ si $t \rightarrow 0$.

Consideramos primero el caso $-1 < m < 0$.

TEOREMA 1.7.

Sea $u(x, t)$ una solución de (PC) verificando

$$(1.17) \quad u^m(x, t) = o(|x|) \text{ cuando } |x| \rightarrow \infty$$

uniformemente en $t \in (\tau, T]$, para todo $\tau > 0$. Entonces $u(t, x)$ es el único elemento maximal del conjunto de soluciones de (PC).

Señalemos que la igualdad (1.17), es óptima porque el crecimiento de u^m para las malas soluciones (0.4) es justamente $O(|x|)$.

El Teorema se obtiene como consecuencia del siguiente principio de contracción:

LEMA 1.8.

Sea $-1 < m < 0$ y sean u_1, u_2 dos soluciones de (0.1) en \mathbf{Q}_T , con u_2 verificando (1.17). Para cada $0 < s < t \leq T$, se tiene

$$(1.18) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x, t) - \hat{u}(x, t)]_+ dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} [u(x, s) - \hat{u}(x, s)]_+ dx$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, tal que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ y $\phi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$, y sea $\phi_n(x) = \phi(x/n)$. Tomamos una función $p \in C^\infty(\mathbf{R})$ tal que $p(s) = 0$ para $s < 0$, $0 < p'(s) < 1$ para $s > 0$ y $p(\infty) = 1$.

Si llamamos $w = \frac{u_1^m - u_2^m}{m}$ y multiplicamos (0.1) por $\phi_n(x)p(w)$, obtenemos integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int \phi_n(x)p(w)(u_1 - u_2)_t dx &= - \int w_x(p(w)\phi_n)_x dx = \\ &= - \int p'(w)w_x^2 \phi_n dx - \int w_x p(w) \phi_{n,x} dx \leq \\ &= - \int j(w)_x \phi_{n,x} dx = \int j(w) \phi_{n,xx} dx \end{aligned}$$

siendo $j(s) = \int_0^s p(r) dr$.

Haciendo p tender a la función sign_+ (igual a 1 en $(0, \infty)$ y 0 en el resto), j converge a $[\cdot]_+$, y se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int [u_1(x, t) - u_2(x, t)]_+ \phi_n(x) dx \leq \int [w]_+ \phi_{n,xx} dx \leq \frac{c}{n^2} \int_{n \leq |x| \leq 2n} u_2^m(x, t) dx$$

ya que $[w]_+ = [u_2^m - u_1^m]_+ / |m| \leq u_2^m / |m|$.

Debido a (1.17), integrando desde s hasta t , tenemos

$$(1.19) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} [u_1(x, t) - u_2(x, t)]_+ \phi_n(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} [u_1(x, s) - u_2(x, s)]_+ \phi_n(x) dx + o\left(\frac{n^2}{n^2}\right)$$

Por consiguiente, si $n \rightarrow \infty$ se cumple (1.18). ■

Observamos, que la condición (1.17) puede ser debilitada si la escribimos en la forma integral necesaria para estimar la integral en t , que aparece en el último término en (1.19) como $o(1)$.

Una primera consecuencia de este lema es que la solución construida en la Sección 1 es única. En efecto, tales soluciones satisfacen la condición (1.17), y, por tanto, coinciden.

Por supuesto, no necesitamos que u sea C^∞ para efectuar los cálculos anteriores. Se pueden encontrar condiciones más débiles, aunque no son necesarias aquí, por ser nuestra solución lisa.

Seguidamente, presentamos la caracterización completa de la solución maximal del problema (PC) con dato inicial en $L^1(\mathbf{R})$:

TEOREMA 1.9.

La solución maximal de (PC) en \mathbf{Q}_T puede ser caracterizada unívocamente como la solución que satisface una de las siguientes condiciones:

- i) *la masa se conserva*
- ii) *el flujo en el infinito es cero, localmente uniforme en $t \in (0, T]$.*
- iii) *u^m satisface la condición de crecimiento (1.17)*
- iv) *v satisface una condición de semiconvexidad en la forma*

$$v_{xx}(x, t) \geq -c(t)$$
con $c(t)$ acotada en subintervalos compactos de $(0, T]$

DEMOSTRACIÓN:

La solución construida en la Sección 1, cumple todas estas propiedades y por el Teorema 1.7 es la única solución maximal.

Por otra parte, ii) implica i), ya que

$$\frac{d}{dt} \int u(x, t) dx = \phi_{+\infty}(t) + \phi_{-\infty}(t)$$

Para probar que i) implica que la solución es maximal: sea u_1 una solución satisfaciendo i) y sea u_2 la maximal. Tenemos $u_1 \leq u_2$ y como ambas tienen la misma masa que u_0 y son positivas, deben coincidir.

Veamos, por último que iv) implica iii). En efecto, de (1.19) obtenemos, como en el Lema 1.3

$$v(x, t) \geq v(\bar{x}, t) - \frac{c(t)}{2} (x - \bar{x})^2$$

siendo $\bar{x} = \bar{x}(t)$ el punto donde $v(\cdot, t)$ alcanza su valor máximo. En consecuencia, para $t > 0$

$$u^m = c_m v^{m/(m-1)} = O(|x|^{2|m|/(1-m)}),$$

orden de crecimiento mejor que el de (1.17). Por la uniformidad en t , $v_t \geq (m-1)vv_{xx} \geq (m-1)|v|C(t)$ y se tiene

$$u_t \geq C(t)u.$$

Quizás la más sorprendente de estas condiciones es la cuarta. La condición de semiconvexidad, (*) $v_{xx} \geq -k/t$, se demostró por vez primera, para la ecuación (0.1) en el caso $m > 1$ y es válida incluso en varias dimensiones espaciales para el Problema de Cauchy, escribiéndose en la forma $\Delta v \geq -k/t$. Ha resultado ser extremadamente útil para establecer una teoría de esta ecuación (ver [9]). Las condiciones de semiconvexidad proporcionan una manera típica de caracterizar unívocamente las *buenas soluciones*, i.e., soluciones de viscosidad de ecuaciones de Hamilton-Jacobi con hamiltonianos convexos [28]. Aunque una conexión entre (*) y *buenas soluciones* de $v_t = v_x^2$ ha sido estudiada en [4] en el caso límite $m \rightarrow 1$ para la ecuación (0.1), el resultado anterior es, a nuestro juicio, el único caso donde tal propiedad ha sido usada para caracterizar las *buenas soluciones* de una ecuación parabólica.

Establecemos, ahora, los resultados análogos para el caso $m = 0$. Todos los resultados son ciertos para $m = 0$, si reemplazamos la condición (1.17) por la correspondiente condición

$$(1.20) \quad \log(1/u) \leq o(|x|)$$

cuando $|x| \rightarrow \infty$ uniformemente en $t \in (\tau, T)$, $\tau > 0$. La mayoría de los argumentos se aplican sin cambios, a excepción del resultado de comparación, que al ser más complicado, exponemos en el siguiente Lema:

LEMA 1.8'.

Sean u_1 y u_2 dos soluciones de (0.1) en \mathbb{Q}_T con $m = 0$ y supongamos que u_2 satisface (1.20). Entonces se verifica (1.18).

DEMOSTRACIÓN:

Sean $w = \log(u_1) - \log(u_2)$ y ϕ como en el Lema 1.8. Siguiendo la demostración del lema anterior, llamamos

$$I_n(t) = \int [u_1(x, t) - u_2(x, t)]_+ \phi_n(x) dx$$

y obtenemos

$$\frac{d}{dt} I_n(t) \leq \int [w]_+ \phi_{n,xx} dx$$

Para cada $t > 0$, consideramos los conjuntos:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} : \log u_1 \leq 1 + [\log u_2]_+ + 2[\log u_2]_-\}$$

y

$$S_2 = \mathbf{R} - S_1,$$

siendo $[s]_{\pm} = \max\{\pm s, 0\}$.

En S_1 , se verifica

$$[w]_+ = [\log u_1 - \log u_2]_+ \leq 1 + 3[\log u_2]_-$$

asi que

$$a_n(t) = \left| \int_{S_1} [w]_+ \phi_{n,xx} dx \right| \leq \frac{c}{n^2} \int_{n \leq |x| \leq 2n} (1 + [\log u_2]_-) dx \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$, uniformemente en $\tau \leq t \leq T$, debido a (1.20).

Por otra parte, tenemos en S_2 que

$$1 < \log u_1 - \log u_2 \leq \frac{2}{3} \log u_1, \quad 1 < e \leq u_1 \quad \text{y} \quad u_1 \geq e u_2$$

Teniendo también en cuenta que para $z \geq 1$, $\log(z) \leq \frac{1}{r} z^r$ con $0 < r < 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_2} [w]_+ \phi_{n,xx} dx \right| &\leq \frac{3}{2} \int_{S_2} |\phi_{n,xx}| \log u_1 dx \leq \\ &\frac{3}{2r} \int_{S_2} |\phi_{n,xx}| u_1^r dx \leq \frac{3}{2r} \left(\int_{S_2} \phi_n u_1 \right)^r \left(\int_{S_2} |\phi_{n,xx}|^q \phi_n^{-rq} \right)^{1-r} \leq \\ &\frac{3}{2r} \left(1 - \frac{1}{e} \right)^{-r} n^{-(1+r)} \left(\int_{S_2} \phi_n (u_1 - u_2) \right)^r \left(\int_{S_2} |\phi_{n,xx}|^q \phi_n^{-rq} \right)^{1-r} \end{aligned}$$

con $q = \frac{1}{1-r}$.

Eligiendo ϕ de forma adecuada, la última integral es finita. Por ejemplo, si $\phi = \psi^k$, cumpliendo ψ las propiedades pedidas para ϕ en el Lema 1.8 y $k \geq 2/1-r$. Con esta elección

$$\left| \int_{S_2} [w]_+ \phi_{n,xx} dx \right| \leq b_n I_n(t)^r$$

siendo $b_n = c n^{1+r}$. Escogiendo $r = 1/2$, obtenemos

$$(1.21) \quad \frac{d}{dt} I_n(t) \leq a_n + b_n I_n(t)^{1/2}.$$

Integrando (1.21) entre s y t , $0 < s < t \leq T$

$$I_n(t) \leq I_n(s) + \sqrt{2}(a_n^2 + b_n^2 I_n(s))^{1/2}(t-s) + \frac{1}{2} b_n^2 (t-s)^2$$

Si $n \rightarrow \infty$, entonces $a_n, b_n \rightarrow 0$, y por consiguiente, se obtiene (1.18). ■

SECCION 3.

En esta sección analizamos el desarrollo asintótico de la solución maximal del problema (PC), considerando los casos $|x| \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow \infty$. Los resultados no difieren esencialmente de los obtenidos en [35],[22], respectivamente, para el caso $0 < m < 1$. Por ello, expondremos esquemáticamente las demostraciones.

En lo que concierne al comportamiento cuando $|x| \rightarrow \infty$, conviene destacar que la solución maximal decrece como $|x|^{-2\alpha}$, mientras que sólo es necesaria la estimación más débil (1.17) para caracterizar dicha solución.

En realidad, el comportamiento asintótico $|x|^{-2\alpha}$ es exacto para una clase de datos iniciales incluyendo funciones con soporte compacto, como veremos seguidamente.

TEOREMA 1.10.

Supongamos que $-\infty < \lambda = \sup\{x : u_0(x) > 0\} < +\infty$. Para cada $t > 0$, tenemos que cuando $x \rightarrow \infty$

$$u(x, t) = \bar{u}_\infty(x - \lambda, t)(1 + o(\frac{1}{x}))$$

siendo \bar{u}_∞ la solución dada en (0.3).

La demostración, como en [35], se basa en el estudio del desarrollo de $v_x(x, t)$ para x grande. Este desarrollo se obtiene de la estimación $v_{xx} \geq -\beta/t$ y de la comparación con las soluciones \bar{u}_∞ . En efecto, se puede demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [(1+m)tv_x(x, t) + x] = \lambda$$

y el resultado se obtiene por integración.

TEOREMA 1.11.

Sea $M = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)dx$. Entonces, si $t \rightarrow \infty$

$$t^\beta |u(x, t) - \bar{u}(x, t; M)| \rightarrow 0$$

uniformemente en x , en conjuntos de la forma $|x| \leq Ct^\beta$, $C > 0$

Señalemos que haciendo uso del Corolario 1.5, podemos aplicar los argumentos utilizados en [22], donde se estudia este comportamiento para soluciones no-negativas de la ecuación del medio poroso N -dimensional.

DEMOSTRACIÓN:

Sea u_0 continua y de soporte compacto. Existen τ_1, M_1 tales que

$$u_0(x) \leq \bar{u}(x, \tau_1; M_1)$$

y por el Lema 1.6

$$u(t, x) \leq \bar{u}(x, t + \tau_1; M_1)$$

Definimos para cada $t > 0$ fijo

$$\begin{aligned} \Sigma_t &= \{(M, \tau) : M \leq M_1, u(t, x) \leq \bar{u}(x, t + \tau_1; M_1)\} \quad y \\ M(t) &= \inf\{M : (M, \tau) \in \Sigma_t\} \end{aligned}$$

Aplicando el Corolario 1.5 se deduce que $\tau \leq c(1+t)$, por lo que

$$M(t) = \min\{M : (M, \tau) \in \Sigma_t\}$$

Ahora, aplicando el Principio del Máximo Fuerte se obtiene: Dado $t_0 > 0$ existe $t_1 > t_0$ tal que $M(t_0) > M(t_1)$.

Tomando $u_k(t, x) = ku(k^{1+m}t, kx)$ se demuestra facilmente que si $k \rightarrow \infty$, u_k convergen uniformemente a $w(x, t)$ que verifica

$$w(t, x) = \bar{u}(t + \bar{\tau}(t), x, M)$$

siendo

$$\bar{\tau}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k(t)$$

Utilizando de nuevo el Corolario 1.5, llegamos a $\bar{\tau}(t) = 0$.

Finalmente, tomando $t = 1$, $k^{m+1} = t$ y $kx = x$ se sigue el resultado.

Para $u_0 \in L^1$ y no negativo la demostración se lleva a cabo exactamente igual que en [22]. ■

SECCION 4.

Para $u_0 \in L^1(\mathbf{R})$ fijo, $u_0 \geq 0$ y $u_0 \not\equiv 0$ estudiamos el límite cuando $m \rightarrow -1$ de las soluciones $u_m(x, t)$ del problema (PC) con exponente $m > -1$.

En la proposición 1.6 hemos probado que $u_m \in L^\infty(\mathbf{Q}_\tau)$ para $\tau > 0$, incluso cuando u_0 no es una función acotada.

En realidad

$$(1.22) \quad u_m(x, t) \leq [(1+m)K_m \frac{M^2}{t}]^{\frac{1}{1+m}}$$

siendo

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx$$

La constante $K_m > 0$ es exacta en el sentido de que es alcanzada por la solución de Barenblatt $\bar{u}(x, t; M)$.

Su valor es

$$K_m = \frac{1}{8(1-m)} \frac{\Gamma(\frac{1}{1-m})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{1-m} + \frac{1}{2})}$$

en donde Γ es la función Gamma de Euler.

Notemos que $K_m \rightarrow 1/16$, cuando $m \rightarrow -1$.

La acotación (1.22) nos permite deducir, facilmente, un primer resultado acerca de cómo las soluciones u_m se anulan en el límite $m \rightarrow -1$.

PROPOSICIÓN 1.12.

Para cada $\tau_1 > \tau_0 = \frac{M^2}{16}$, se tiene que $u_m(x, (1+m)\tau) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow -1$ uniformemente en \mathbf{Q}_{τ_1} .

Este resultado nos muestra cómo la solución u_m se hace muy pequeña en un intervalo de tiempo del orden de $(1+m)\tau_0$, dando lugar cuando $m \rightarrow -1$ a una capa límite. Demostraremos que la anterior estimación de la amplitud de la capa es exacta.

En el caso de la solución de tipo fuente \bar{u} , la fórmula explícita (0.2) nos permite obtener los siguientes resultados:

$$\bar{u}_m(x, (1+m)\tau; M) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \text{ ó } \tau > \tau_0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \text{ y } \tau < \tau_0 \end{cases}$$

Además, para r y $R > 0$:

$$(1.23) \quad \lim_{m \rightarrow -1} \int_R^\infty \bar{u}_m(x, (1+m)\tau; M) dx = \min\{2\sqrt{\tau}, \frac{M}{2}\}$$

Por consiguiente, para $\tau > 0$ fijo, $\bar{u}_m(x, (1+m)\tau; M)$ converge debilmente a $(m - 4\sqrt{\tau})_+ \delta(x)$ en el sentido de las medidas de \mathbf{R} . Esto nos muestra cómo se pierde la masa M en el límite $m \rightarrow -1$ durante el intervalo de tiempo reescalado $[0, \tau_0]$.

En el teorema siguiente, estimaremos la pérdida de masa de las soluciones.

TEOREMA 1.13.

Para cada $u_0 \in L^1(\mathbf{R})$, $u_0 \geq 0$ se tiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow -1} \int_{-R}^{+R} u_m(x, (1+m)\tau) dx = (M - 4\sqrt{\tau})_+$$

siendo

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx$$

NOTA.

El orden en el límite (1.24) es importante ya que al conservarse la masa total, se verifica

$$\lim_{m \rightarrow -1} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} u_m(x, (1+m)\tau) dx = M$$

DEMOSTRACIÓN:

En todo lo que sigue usaremos la notación $\varepsilon = 1 + m$, por lo que $\varepsilon \rightarrow 0$ si $m \rightarrow -1$. También, eliminaremos el subíndice m en u_m y escribiremos simplemente u .

La demostración se basa en la igualdad (1.23). Para $R > 0$, definimos $u_{0,R}(x) = u_0(x)$, para $|x| \leq R$ y $u_{0,R}(x) = 0$ en el resto. Llamaremos

$$M_R = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{0,R}(x) dx$$

Sea $u_R(x, t)$ la solución de (PC) con dato inicial $u_{0,R}$. Utilizando el Principio de Comparación por Desplazamiento, como fué establecido en [35, p.296], obtenemos

$$\int_r^\infty u(x, \varepsilon\tau)dx \geq \int_r^\infty u_R(x, \varepsilon\tau)dx \geq \int_r^\infty \bar{u}(x + R, \varepsilon\tau; M_R)dx$$

y

$$\int_{-\infty}^r u(x, \varepsilon\tau)dx \geq \int_{-\infty}^r u_R(x, \varepsilon\tau)dx \geq \int_{-\infty}^r \bar{u}(x - R, \varepsilon\tau, M_R)dx$$

para cada $r \in \mathbf{R}$.

De estas desigualdades, deducimos

$$\int_{-\infty}^r u(x, \varepsilon\tau)dx \leq M - M_R + \int_{-\infty}^r \bar{u}(x + R, \varepsilon\tau, M_R)dx$$

y

$$\int_r^\infty u(x, \varepsilon\tau)dx \leq M - M_R + \int_r^\infty \bar{u}(x - R, \varepsilon\tau, M_R)dx$$

Combinando estas cuatro desigualdades:

$$\begin{aligned} 2M_R - M - \int_{-\infty}^{-(R+1)} \bar{u}(x + R, \varepsilon\tau, M_R)dx - \int_{R+1}^\infty \bar{u}(x - R, \varepsilon\tau, M_R)dx \leq \\ \int_{-(R+1)}^{R+1} u(x, \varepsilon\tau)dx \leq M - \int_{-\infty}^{-(R+1)} \bar{u}(x - R, \varepsilon\tau, M_R)dx - \int_{R+1}^\infty \bar{u}(x + R, \varepsilon\tau, M_R)dx \end{aligned}$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, (1.23) implica

$$2M_R - M - 4\sqrt{\tau} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-(R+1)}^{R+1} u(x, \varepsilon\tau)dx \leq M - 4\sqrt{\tau}$$

para $0 < \tau \leq \tau_R = M_R^2/16$, y

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-(R+1)}^{R+1} u(x, \varepsilon\tau)dx \leq M - M_R \quad \text{para } \tau > \tau_R$$

Si $R \rightarrow \infty$, tenemos que $M_R \rightarrow M$, con lo que acaba la demostración. ■

Utilizando argumentos similares, basados en (1.23) y en el Principio de Comparación por Desplazamiento, probamos el resultado siguiente que nos da la medida de la tasa de penetración de una masa dada en una región vacía.

PROPOSICIÓN 1.14.

Siendo $u_0 \in L^1(\mathbf{R})$, $u_0 \geq 0$, $\int u_0(x)dx = M$ y con soporte contenido en $(-\infty, 0]$, se satisface

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_R u(x, \varepsilon\tau)dx = \min\{2\sqrt{\tau}, M/2\}$$

para cada $R > 0$

En el caso $M = \infty$, la misma fórmula sigue siendo válida con el segundo miembro igual a $2\sqrt{\tau}$.

Podemos obtener información sobre la tasa de decrecimiento, en términos de $\varepsilon = 1 + m$, considerando las funciones w_ε definidas por

$$w_\varepsilon(x, \tau) = u_m(x, \varepsilon\tau)^\varepsilon$$

Observamos que en función de w_ε , (1.22) se escribe

$$w_\varepsilon(x, \tau) \leq K_{\varepsilon-1} \frac{M^2}{\tau}$$

De hecho, esta desigualdad es exacta en el límite para $\tau > \tau_0 = \frac{M^2}{16}$, lo cual demostraremos con el teorema siguiente:

TEOREMA 1.15.

Sea $u_0 \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$, $u_0 \geq 0$. Entonces, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

$$w_\varepsilon(x, \tau) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \tau \leq \tau_0 \\ \tau_0/\tau & \text{si } \tau > \tau_0 \end{cases}$$

uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbf{Q} .

DEMOSTRACIÓN:

i) Aplicando el Principio del Máximo (cf.(1.1)), tenemos

$$(1.25) \quad u(x, t) \leq \|u_0\|_\infty \text{ en } Q, \text{ y por tanto } w_\varepsilon(x, \tau) \leq \|u_0\|_\infty^\varepsilon.$$

De (1.5) se deduce que la presión $v(x, \varepsilon\tau) = \frac{1}{\varepsilon-2}u(x, \varepsilon\tau)^{\varepsilon-2}$ satisface

$$v_\tau = \varepsilon(2-\varepsilon)|v|v_{xx} + \varepsilon v_x^2 \geq -\frac{(2-\varepsilon)|v|}{\varepsilon\tau} + \varepsilon v_x^2$$

Por otra parte, si (1.6) se escribe de la forma $v_\tau \leq \frac{|v|}{\tau}$, entonces

$$v_x^2 \leq \frac{2|v|}{\varepsilon^2\tau}$$

Como

$$w_{\varepsilon,x} = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} w \frac{v_x}{|v|}$$

llegamos a

$$(1.26) \quad w_{\varepsilon,x}^2 \leq \frac{2}{2-\varepsilon} \frac{w_\varepsilon^{(2+\varepsilon)/\varepsilon}}{\tau}$$

Utilizando (1.5) y (1.6) obtenemos para la derivada con respecto de τ

$$(1.27) \quad -\frac{w_\varepsilon}{\tau} \leq w_{\varepsilon,\tau} \leq \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \frac{w_\varepsilon}{\tau}$$

Las estimaciones (1.25)(1.27) implican, (pasando a una subsucesión si fuese necesario) que w_ε converge a una función $w(x, \tau)$ uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbf{Q} .

Claramente, w satisface

$$(1.28) \quad w \leq \min\{1, \tau/\tau_0\}$$

y

$$(1.29) \quad -\frac{w}{\tau} \leq w_\tau \leq 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, \infty).$$

ii) Demostramos ahora que w no depende de x . Fijamos $\tau > 0$ e integramos (1.26) entre x e y cualesquiera, obteniendo

$$\left| \left(\frac{1}{w_\varepsilon(x, \tau)} \right)^\gamma - \left(\frac{1}{w_\varepsilon(y, \tau)} \right)^\gamma \right| \leq \left(\frac{2-\varepsilon}{2\tau} \right)^{1/2} \frac{|x-y|}{\varepsilon}$$

con $\gamma = (2-\varepsilon)/2\varepsilon$.

Haciendo uso de (1.25), tenemos

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{w_\varepsilon(y, \tau)}{w_\varepsilon(x, \tau)} \right)^\gamma - 1 \right| &\leq \left(\frac{2-\varepsilon}{2\tau} \right)^{1/2} \frac{|x-y|}{\varepsilon} w_\varepsilon(y, \tau)^\gamma \leq \\ &\left(\frac{2-\varepsilon}{2\tau} \right)^{1/2} \|u_0\|_\infty^{\frac{2-\varepsilon}{2}} \frac{|x-y|}{\varepsilon} \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\frac{w_\varepsilon(y, \tau)}{w_\varepsilon(x, \tau)} \leq \left[1 + \left(\frac{2-\varepsilon}{2\tau} \right)^{1/2} \|u_0\|_\infty^{\frac{2-\varepsilon}{2}} \frac{|x-y|}{\varepsilon} \right]^{\frac{2\varepsilon}{2-\varepsilon}}$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

$$w(y, \tau) \leq w(x, \tau) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbf{R}$$

Por consiguiente, w no depende de x .

iii) Fijamos $0 < \tau < \tau_0$. Si $R > 0$ es suficientemente grande, el Teorema 1.13 implica que para $\varepsilon = \varepsilon(R) > 0$ suficientemente pequeño

$$\frac{M - 4\sqrt{\tau}}{2} \leq \int_{-R}^R u(x, \varepsilon\tau) dx$$

Por tanto, se verifica

$$0 < \frac{M - 4\sqrt{\tau}}{5R} \leq u(x_\varepsilon, \varepsilon\tau)$$

para alguna sucesión $\{x_\varepsilon\}$ con $|x_\varepsilon| \leq R$.

Como $w = w(\tau)$ por la etapa ii), obtenemos que $w(\tau) \geq 1$, lo que unido a (1.28) nos proporciona $w(\tau) \equiv 1$ para $0 < \tau \leq \tau_0$. Finalmente por (1.29) $w(\tau) = \tau_0/\tau$ para $\tau > \tau_0$. Por consiguiente w está unívocamente determinado y la sucesión w_ε converge a w . ■

CAPITULO II

SOLUCIONES CON DATO INICIAL GENERAL

Continuamos el estudio del Problema de Cauchy, considerando ahora el dato inicial en $L^1_{loc}(\mathbf{R})$.

Probaremos que, al igual que en el caso $0 < m < 1$, [25], no se requieren condiciones de crecimiento en el infinito para la existencia de solución de (PC). Entenderemos por una solución de (PC): una función positiva $u \in C^\infty(\mathbf{Q})$, que resuelve (0.1) en \mathbf{Q} y tal que $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ en $L^1_{loc}(\mathbf{R})$, cuando $t \rightarrow 0$.

En la primera sección, obtendremos una estimación de la forma

$$\int_{-R}^{+R} u(x, t) dx \leq F(t, R, \int_{-2R}^{+2R} u_0(x) dx)$$

que, junto con las clásicas propiedades de monotonía, nos permitirá demostrar la existencia de una solución.

Sin embargo, como veremos en la sección segunda, sólo se tiene unicidad en una clase restringida de soluciones: la que satisface la condición de decrecimiento cuando $|x| \rightarrow \infty$. Condición hallada en el anterior capítulo, en el marco de L^1 . Al igual que en L^1 , esta condición nos caracteriza también a la solución maximal.

SECCION 1.

TEOREMA 2.1.

Sea $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, $u_0 \geq 0$ y $u_0 \not\equiv 0$. Existe una solución u del problema (PC) tal que $u \in C([0, \infty); L^1_{loc}(\mathbf{R}))$ y

$$(2.1) \quad v_{xx} \geq \frac{-1}{(1+m)t}$$

$$(2.2) \quad -\frac{u}{(1+m)t} \leq u_t \leq \frac{u}{(1-m)t}$$

Además para $\tau > 0$, existe $C = C(\tau)$ tal que

$$(2.3) \quad |v(x, t)| \leq \frac{(|x| + C)^2}{2(1+m)t}, \quad \text{si } t \geq \tau$$

Preparamos la demostración, estableciendo una serie de Lemas. El primero de ellos, es un resultado de comparación en la línea del Lema 3.1 de [25].

Demostramos primero los resultados para $-1 < m < 0$.

LEMA 2.2.

Sean $u_1, u_2 \in C^\infty(\mathbf{Q}_T)$ dos soluciones de (0.1) tales que $u_1 \geq u_2$ y u_2 satisface la condición de decrecimiento

$$(2.4) \quad |v_2(x, t)| \leq C(\tau) \frac{x^2}{t} \quad \text{para } |x| \geq R_0 \text{ y } \tau < t < T$$

Entonces, para cada $0 < \tau \leq s, t \leq T$ y $R \geq R_0$ se tiene

$$(2.5) \quad \int_{-R}^{+R} (u_1(x, t) - u_2(x, t)) dx \leq C \left[\int_{2R}^{2R} (u_1(x, s) - u_2(x, s)) dx + R^{\frac{(1+m)}{m-1}} |t - s|^{\frac{1}{1-m}} \right]$$

con $C = C(m, \tau) > 0$.

DEMOSTRACIÓN:

Sean $\psi \in C_0^\infty(0, \infty)$ y $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ funciones no negativas. Integrando por partes, se obtiene

$$\iint \psi'(t) \phi(x) (u_1 - u_2)(x, t) dx dt = - \iint \psi(t) \phi_{xx} \frac{u_1^m - u_2^m}{m} (x, t) dx dt$$

que implica en $D'(0, \infty)$

$$\frac{d}{dt} \int \phi(x) (u_1(x, t) - u_2(x, t)) dx = \int \phi_{xx} \frac{u_1^n - u_2^n}{n u_1^n u_2^n} (x, t) dx$$

con $n = -m \in (0, 1)$.

Si llamamos $U = u_1 - u_2$, por la desigualdad de Hölder

$$(2.6) \quad \left| \frac{d}{dt} \int \phi U dx \right| \leq C \left(\int \phi U dx \right)^n \left(\int \frac{|\phi_{xx}|^\beta u_2^{2m\beta}}{\phi^{\beta n}} dx \right)^{1+m}$$

siendo $\beta = 1/1 + m$.

Denominando a la última integral $I(t)$ e integrando (2.6) entre s y t , tenemos

$$\left(\int \phi(x) U(x, t) dx \right)^{1+m} \leq \left(\int \phi(x) U(x, s) dx \right)^{1+m} + C \left| \int_s^t I(\theta)^{1+m} d\theta \right|$$

Ahora, tomamos una función $\phi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\phi_0 \geq 0$ tal que $\phi_0(x) = \phi_0(-x)$, $\phi_0(x) = 1$ para $|x| \leq 1$ y $\phi_0(x) = 0$ para $|x| \geq 2$.

Sea $\phi(x) = \phi_0(x/R)^k$ para $k > 0$. Utilizando (2.4) resulta para $R \geq R_0$

$$I(t)^{1+m} \leq C R^{-\frac{(1+m)^2}{1-m}} t^{\frac{2m}{1-m}} \left(\int \frac{(\phi_0^k)^n}{\phi^{\beta n k}} dx \right)^{1+m}$$

siendo C una constante que depende solo de m y τ

Como en [25], elegimos $k \geq 2/(1 + m)$ para que la última integral esté acotada. En consecuencia, obtenemos

$$\left(\int \phi(x) U(x, t) dx \right)^{1+m} \leq \left(\int \phi(x) U(x, s) dx \right)^{1+m} + C R^{-\frac{(1+m)^2}{1-m}} |t - s|^{\frac{1+m}{1-m}}$$

por lo que se sigue (2.5). ■

Existe una diferencia importante entre este cálculo y el de [20] para $0 < m < 1$, ya que el decaimiento de u_2 cuando $|x| \rightarrow \infty$ es necesario para estimar el último término de [25], y queda reflejado en el hecho de que C depende de τ .

También señalamos que (2.5) es válido para $s < t$ y $s > t$.

Aún cuando no se puede tomar $u_2 \equiv 0$ en la anterior demostración, el resultado sigue siendo cierto y será esencial, como veremos en la demostración del Teorema. Seguidamente probamos este resultado.

LEMA 2.3.

Sea u una solución de (PC) con dato inicial en $L^1_{loc}(\mathbf{R})$. Entonces para cada $R, t > 0$

$$(2.7) \quad \int_{-R}^R u(x, t) dx \leq \int_{-2R}^{2R} u_0(x) dx + C_m R^{-\frac{\alpha}{\beta}} t^\alpha$$

DEMOSTRACION:

Aplicando los argumentos del Lema 2.1 a $u(x, t)$ y $\hat{u}(x, t) = \bar{u}(x, t+1; 1)$ e integrando (2.3) desde $t = 0$ hasta $t = 1$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [u(x, 1) - \hat{u}(x, 1)]_+ dx &\leq \int_{-2}^2 [u_0(x) - \hat{u}(x, 0)]_+ dx \\ &\quad + \int_0^1 \int_{1 \leq |x| \leq 2} u^m(x, t) dx dt \end{aligned}$$

Como la última integral es finita, obtenemos:

$$\int_{-1}^1 u(x, 1) dx \leq \int_{-2}^2 u_0(x) dx + C_m$$

Para R y $t > 0$, efectuamos el reescalamiento $u(x, t) = (T/R^2)^\alpha \hat{u}(x/R, t/T)$ y aplicamos la desigualdad anterior a \hat{u} . ■

En la sección primera del Capítulo 1 (cf. Lema 1.3), hemos demostrado que una solución con dato inicial en $L^1(\mathbf{R})$ se convierte en acotada para $t \geq \tau > 0$. Esta propiedad se conoce usualmente como efecto regularizante. Un efecto regularizante $L^1 - L^\infty$ se tiene también para las soluciones de (0.1) y ha sido probado en [9] para $m > 1$ y en [25] para $0 < m < 1$; utilizando la estimación $\Delta v \geq -k/t$. En una dimensión espacial se puede efectuar una demostración sencilla de este efecto incluso para $m < 0$, como probaremos ahora, para las soluciones construidas en el Capítulo 1.

LEMA 2.4.

Sea u la solución maximal de (PC) con dato inicial en $L^1(\mathbf{R})$. Entonces

$$(2.8) \quad u(x, t) \leq C \left[t^{-\beta} \left(\int_{x-R}^{x+R} u_0(y) dy \right)^{2\beta} + \left(\frac{t}{R^2} \right)^\alpha \right]$$

con $C = C(m)$.

DEMOSTRACIÓN:

Siguiendo las ideas del Lema 1.3, fijamos $t > 0$ y haciendo uso de la desigualdad $v_{xx} \geq -\beta/t$, concluimos que ó bien en el intervalo $(R/2 - x, x)$ ó bien en el intervalo $(x, R/2 + x)$

$$u(y, t) \geq (u(x, t)^{m-1} + \frac{\beta}{2\alpha t}(y-x)^2)^{-\alpha}.$$

Por consiguiente, por el Lema 2.3

$$\begin{aligned} \int_0^{R/2} (u(x, t)^{m-1} + \frac{\beta}{2\alpha t} z^2)^{-\alpha} dz &\leq \int_{x-R/2}^{x+R/2} u(y, t) dy \leq \\ &\int_{x-R}^{x+R} u_0(y) dy + CR^{-\frac{\alpha}{\beta}} t^\alpha \end{aligned}$$

Estimamos la integral del primer miembro, I , por

$$I = Cu(x, t)^{\frac{1}{2\beta}} t^{\frac{1}{2}} \int_0^L (1 + s^2)^{-\alpha} ds$$

siendo

$$L = R \left(\frac{\beta u(x, t)^{1-m}}{2\alpha t} \right)^{1/2}$$

Entonces, ó bien $L \leq 1$ ó bien $I \geq Cu(x, t)^{1/2\beta} t^{1/2}$. En el segundo caso, tenemos

$$u(x, t)^{\frac{1}{2\beta}} \leq t^{-1/2} 2 \int_{x-R}^{x+R} u_0(x) dx + CR^{-\frac{\alpha}{\beta}} t^{\frac{\alpha}{2\beta}}$$

y si elevamos a la potencia $2\beta > 1$, obtenemos (2.8).

En el otro caso, $L \leq 1$ implica $u(x, t) \leq C(t/R^2)^\alpha$ que está incluido en (2.8). ■

Ahora, ya podemos comenzar con la **demostración del Teorema 2.1** :

Dado $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, definimos $u_{0,n}(x) = u_0(x)$ para $|x| \leq n$ y 0 en el resto. Consideramos la solución maximal u_n de (0.1) con dato inicial $u_{0,n}$ construida como en el Capítulo 1.

La sucesión $\{u_n\}$ es no decreciente en n y por el Lema 8.2 está acotada en $L^\infty(0, T; L^1_{loc}(\mathbf{R}))$ por lo que existe $u = \lim u_n$, $u \in L^\infty(0, T; L^1_{loc}(\mathbf{R}))$ y satisface (2.7) y (2.8). Por tanto u está acotada localmente en \mathbf{Q} . Además, al ser el límite monótono u es positiva y por la teoría standard, concluimos que $u \in C^\infty(\mathbf{Q})$ y resuelve (0.1).

Estudiamos ahora la continuidad de $u(t) : [0, \infty) \rightarrow L^1_{loc}(\mathbf{R})$. Para $R > 0$ y $0 < s < t$:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R |u(x, t) - u(x, s)| dx &\leq \int_{-R}^R (u(x, t) - u_n(x, t)) dx + \\ &\int_{-R}^R |u_n(x, t) - u_n(x, s)| dx + \int_{-R}^R (u(x, s) - u_n(x, s)) dx = \\ &I_1(R) + I_2(R) + I_3(R). \end{aligned}$$

Dado $s > 0$, escogemos R_0 de forma que la estimación (2.4) sea válida para u_1 en el tiempo $\tau = s$ y con constante $C_1 = C(u_1, s)$. Entonces, si tomamos $R \geq R_0$, $I_3(2R) < \varepsilon/4$ en el caso de que n sea suficientemente grande. Elegimos tal $n = n(s, R)$.

Como $u_n \in C([0, \infty); L^1(\mathbf{R}))$, tenemos que $I_2(R)$ es menor que $\varepsilon/4$, si t está suficientemente próximo a s .

Finalmente, estimamos $I_1(R)$ aplicando el Lema 2.2 a u_k y u_n con $k > n$ y haciendo $k \rightarrow \infty$. Como $u_n \geq u_1$ tenemos

$$I_1 \leq \int_{-2R}^{2R} (u(x, s) - u_n(x, s)) dx + C_1 R^{\alpha/\beta} |t - s|^\alpha$$

El primer término del segundo miembro es menor que $\varepsilon/4$ y el último es menor o igual que $\varepsilon/4$, si $|t - s|$ es suficientemente pequeño.

Uniendo estas estimaciones, obtenemos

$$\int_{-R}^R |u(x, t) - u(x, s)| dx < \varepsilon$$

para R grande y $|t - s| \leq \delta(\varepsilon, s, R)$.

El estudio de la continuidad en $s = 0$, requiere un tratamiento especial porque la estimación (2.4) no es válida hasta $\tau = 0$. Procedemos, por tanto, del siguiente modo:

Dado u_0 , lo podemos aproximar por un dato $\tilde{u}(x, 0)$, que satisface $|\tilde{u}(x, 0)| \leq C(x^2 + 1)$, sumando sencillamente una solución de tipo fuente $\bar{u}(x, \tau; M)$ a u_0 . Entonces $\|\tilde{u}_0 - u_0\|_1 \leq M$ y $\tilde{u}(x, t) \geq \bar{u}(x, t + \tau; M)$, por lo que \tilde{u} satisface la condición (2.4) hasta $t = 0$ y la conclusión es cierta para \tilde{u} .

Ahora bien por (2.2), tenemos que $\|u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)\|_1 \leq M$, lo que implica $\tilde{u}(t) \rightarrow u(t)$ en $L^1(\mathbf{R})$ uniformemente en t cuando $M \rightarrow 0$ y se obtiene la conclusión para u .

Como las soluciones u_n verifican las estimaciones (2.1), (2.2) y (2.3) uniformemente en n , éstas son preservadas en el límite.

Por último notamos que el límite anterior no depende del proceso de aproximación del dato inicial por ser monótono.

Para el caso $m=0$ todos los resultados anteriores son válidos. No obstante, las demostraciones de los Lemas 2.2 y 2.3, y del Teorema 2.1 requieren algunas modificaciones. Para ello, utilizaremos una versión simplificada del argumento usado para probar el Lema 1.8'.

En efecto, como $u_1/u_2 \geq 1$ y $\log(z) \leq c(z-1)^r$ para $z \geq 1$ y $0 < r < 1$, obtenemos, en vez de (2.6)

$$\left| \frac{d}{dt} \int \phi U dx \right| \leq C \left(\int \phi U dx \right)^r \left(\int |\phi_{xx}|^q \phi^{-rq} u_2^{-rq} dx \right)^{1-r}$$

con $q = 1/(1-r)$.

En este punto, podemos seguir el Lema 2.2 y llegamos a

$$\left(\int \phi(x) U(x, t) dx \right)^{1-r} \leq \left(\int \phi(x) U(x, s) dx \right)^{1-r} + CR^{r-1} |t - s|^{1-r},$$

lo que proporciona (2.5) para $m = 0$.

El argumento anterior se puede utilizar para estimar las integrales del tipo $\int [w]_+ \phi_{n,xx} dx$, que nos aparecen cuando utilizamos la fórmula (1.19) en las demostraciones del Lema 2.3 y del Teorema 2.1.

SECCION 2.

Aquí vamos a probar el resultado análogo del Teorema 1.7 , para dato inicial general. Estableceremos que la misma condición de decrecimiento nos caracteriza a la solución maximal. Previamente probamos que la solución construida en la sección anterior es menor o igual que cualquier solución que satisface la condición (2.9) $u^m = o(|x|)$, cuando $|x| \rightarrow \infty$, uniformemente en $t \in (\tau, T)$ para todo $\tau > 0$.

LEMA 2.5.

Sea u una solución de (PC) satisficiendo (2.9) y sea \hat{u} la solución construida como límite de soluciones monótonas crecientes en $C([0, \infty); L^1(\mathbf{R}))$. Entonces $u \geq \hat{u}$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea \hat{u}_k una sucesión que crece monótonamente a \hat{u} . Aplicando el lema 2.1 , obtenemos para $0 < s < t$:

$$\int [\hat{u}_k(x, t) - u(x, t)]_+ dx \leq \int [\hat{u}_k(x, s) - u(x, s)]_+ dx$$

Como $\hat{u}_k(s) \rightarrow u_{0,k}$ en $L^1(\mathbf{R})$ y $u(s) \rightarrow u_0$ en $L^1_{loc}(\mathbf{R})$ si $s \rightarrow 0$, y además $u_{0,k} \leq u_0$, tenemos que

$$[\hat{u}_k(\cdot, s) - u(\cdot, s)]_+ \rightarrow 0 \quad \text{en } L^1(\mathbf{R}), \text{ cuando } s \rightarrow 0.$$

Por tanto

$$\int [\hat{u}_k(x, t) - u(x, t)]_+ dx = 0 \quad \text{para todo } t > 0.$$

Ahora, si $k \rightarrow \infty$ se obtiene que $u \geq \hat{u}$. ■

TEOREMA 2.6.

Para cada $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, existe una única solución maximal de (PC), y puede ser caracterizada por la condición de decrecimiento (2.9)

DEMOSTRACIÓN:

La solución \hat{u} , construida en el Teorema 2.1, verifica (2.9) y en el Lema anterior, hemos probado que cualquier otra solución es mayor que \hat{u} . Por tanto, nos resta probar que \hat{u} es mayor que cualquier otra solución de (PC) con igual dato inicial u_0 .

Supongamos, en primer lugar, que existen \bar{x}, τ y M tales que

$$u_0(x) \geq \bar{u}(x + \bar{x}, \tau; M)$$

Entonces por el Lema 2.5, tenemos $\hat{u}(x, t) \geq \bar{u}(x + \bar{x}, t + \tau; M)$, y en consecuencia

$$|\hat{v}(x, t)| \leq \frac{|x + \bar{x}|^2 + C(t + \tau)^{2\beta}}{2(1 + m)(t + \tau)}$$

Es decir, $\hat{v}(x, t) = O((|x| + 1)^2)$, uniformemente en $0 \leq t \leq T$. Ahora , podemos aplicar la formula (2.3), con $u_1 = u, u_2 = \hat{u}$ y $s = 0$, para obtener

$$\int [u(x, t) - \hat{u}(x, t)]_+ \phi_n(x) dx \leq \int [u(x, 0) - \hat{u}(x, 0)]_+ \phi_n(x) dx + I_n(t),$$

siendo

$$I_n(t) \leq \frac{C}{n^2} \int_0^t \int_n^{2n} (|x| + 1)^{2m/(m-1)} dx dt = C t n^{-\alpha/\beta}$$

Como $u(x, 0) = \hat{u}(x, 0)$ y $I_n \rightarrow 0$, uniformemente en t , si $n \rightarrow \infty$, obtenemos que $u \leq \hat{u}$.

Para un dato inicial general, modificamos u_0 por medio de una solución de tipo fuente con una masa M pequeña, para hallar una solución \hat{u} a la que se puede aplicar la anterior demostración. Este argumento ya fué utilizado para el estudio de la continuidad en $t = 0$. La demostración finaliza haciendo tender M a 0 . ■

Este Teorema nos ha probado también que la propiedad de contracción en L^1 , (2.2), es válida para las soluciones de (PC) con dato inicial general que satisfacen (2.9).

CAPITULO III

UN PROBLEMA MIXTO BIEN PLANTEADO: EXISTENCIA DE SOLUCION

Para el problema (PC) con dato inicial en $L^1(\mathbf{R})$, hemos construido una solución verificando las mismas propiedades que la de la solución del mismo problema con $0 < m < 1$. Sin embargo el caso que estamos tratando, $-1 < m \leq 0$, difiere del anterior en un aspecto fundamental, ya que la solución no es única.

En efecto, existen soluciones clásicas explícitas (0.4), $\bar{u}(x, t) = f(t)g(x)$, que no verifican ninguna de las condiciones que nos caracterizaban a la solución construida. Por consiguiente el problema (PC) con $u_0(x) = \bar{u}(x, 0)$ tiene al menos dos soluciones diferentes y no está bien planteado.

Probamos en este capítulo y en el siguiente, que si añadimos adecuadas condiciones de flujo en el infinito, el problema mixto de tipo Neumann no estandar resultante

$$(PM) \begin{cases} u_t = (u^{m-1}u_x)_x & \text{para } (x, t) \in Q_T \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in \mathbf{R} \\ -\lim_{x \rightarrow \infty} (u^{m-1}u_x)(x, t) = f(t) & \text{para } 0 < t < T \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (u^{m-1}u_x)(x, t) = g(t) & \text{para } 0 < t < T. \end{cases}$$

está bien planteado. Definimos lo que consideraremos por una solución de (PM)

DEFINICIÓN.

Por una solución de (PM), indicamos una solución del Problema de Cauchy (es decir, una solución positiva y C^∞ de la ecuación y tal que $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ en $L^1(\mathbf{R})$ cuando $t \rightarrow 0$) que toma las condiciones de flujo en el siguiente sentido débil

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\tau}^t (u^{m-1}u_x)(x, s)ds &= - \int_{\tau}^t f(s)ds \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{\tau}^t (u^{m-1}u_x)(x, s)ds &= \int_{\tau}^t g(s)ds \end{aligned}$$

para cada $0 \leq \tau < t < T$, siendo ambos límites localmente uniformes en t .

Notamos que esta definición solo supone que $f, g \in L^1_{loc}(0, T)$. También observamos que las soluciones maximales del Problema de Cauchy, son soluciones del problema (PM) con $f = g = 0$ y $T = \infty$; y que las soluciones explícitas de variables separadas tienen flujos crecientes y T es finito.

En la primera sección de este capítulo, justificamos la necesidad de f y $g \geq 0$, lo que indica que los flujos son salientes. Las dos siguientes secciones las dedicamos al estudio del problema elíptico resultante de discretizar la variable tiempo, en el marco de la Teoría de Semigrupos No-Lineales. En la primera se estudia la existencia de solución en el caso particular de datos de flujo constantes, dejando el caso general para la otra sección.

Las cuestiones relativas a la regularidad y unicidad de las soluciones serán abordadas en el siguiente capítulo.

SECCION 1.

La idea básica de la necesidad de la condición de flujo saliente es la siguiente : si existe $t > 0$ tal que $(u^{m-1}u_x)(x, t) \rightarrow -f(t) > 0$ cuando $x \rightarrow \infty$ entonces, $u^m(\cdot, t)/m$ es creciente para x suficientemente grande y por tanto $u(\cdot, t)$ es también creciente , contradiciendo la integrabilidad de $u(\cdot, t)$.

Formalizamos este resultado en la siguiente proposición , que además establece la relación entre la masa de una solución y las condiciones de flujo.

PROPOSICIÓN 3.1.

Sea u una solución de (PM). Entonces $f, g \geq 0$ y para cada $0 < t < T$, se tiene

$$(3.1) \quad M(t) = M_0 - \int_0^t (f(\tau) + g(\tau)) d\tau.$$

DEMOSTRACIÓN:

Comenzamos recordando que el problema (PC) admite una solución maximal $\tilde{u} \in C([0, \infty) : L^1(\mathbf{R}))$, con dato inicial u_0 , que conserva la masa. Por tanto

$$M(t) = \int u(x, t) dx \leq \int \tilde{u}(x, t) dx = M_0,$$

y la masa es finita.

Si multiplicamos la ecuación por una función $\alpha \in C_0^\infty(0, T)$, $\alpha \geq 0$ e integramos con $x < y < \infty$, obtenemos

$$(3.2) \quad \int_0^T u^m(y, t) \alpha(t) dt - \int_0^T u^m(x, t) \alpha(t) dt = m \int_x^y ds \int_0^T (u^{m-1}u_x)(s, t) \alpha(t) dt$$

Por otra parte , teniendo en cuenta que

$$\int_0^T [(u^{m-1}u_x)(s, t) + f(t)] \alpha(t) dt = - \int_0^T \left(\int_\tau^t [(u^{m-1}u_x)(s, \tau) + f(\tau)] d\tau \right) \alpha'(t) dt$$

converge a 0 cuando $s \rightarrow \infty$, si dividimos (3.2) por my , y hacemos $y \rightarrow \infty$, llegamos a

$$\int_0^T f(t) \alpha(t) dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{|m|y} \int_0^T u^m(y, t) \alpha(t) dt \geq 0.$$

Esto prueba que $f \geq 0$ en c.t.p. y la misma demostración nos lleva a $g \geq 0$, haciendo $x \rightarrow -\infty$ en (3.2).

Veamos ahora que la masa es no creciente. Para ello , integramos con $x_1 < x_2, 0 < t_1 < t_2 < T$, obteniendo

$$\int_{x_1}^{x_2} u(s, t_2) ds - \int_{x_1}^{x_2} u(s, t_1) ds = \int_{t_1}^{t_2} (u^{m-1}u_x)(x_2, \tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} (u^{m-1}u_x)(x_1, \tau) d\tau$$

A continuación , hacemos $x_1 \rightarrow -\infty, x_2 \rightarrow +\infty$, de modo que

$$M(t_2) - M(t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} [f(\tau) + g(\tau)] d\tau.$$

Por último , haciendo $t_1 \rightarrow 0$ y sirviéndonos de la continuidad de u en $C([0, T]; L^1(\mathbf{R}))$, obtenemos el resultado.

Para $m = 0$, reemplazamos u^m/m por $\log u$, y el argumento es similar ■

Queda claro, como consecuencia de la demostración anterior, que el signo de las condiciones de flujo está implicado por la condición de masa acotada. Recíprocamente, funciones de flujo estrictamente positivas en un tiempo $t_0 > 0$, implican que $u(\cdot, t) \in L^1(\mathbf{R})$ para todo $t \geq t_0$. Finalmente , la fórmula (3.1) nos permite acotar el tiempo de existencia de las soluciones.

COROLARIO 3.2.

Si $\int_0^\infty (f + g) > M_0$, solo existe solución de (PM) hasta el tiempo T , en el que se anula $M(t)$.

En el capítulo siguiente , probaremos que este tiempo maximal es en efecto alcanzado.

SECCION 2.

En esta sección, estudiamos el problema (PM) con datos de flujo constantes

$$(3.3) \quad \begin{cases} u_t = (u^{m-1}u_x)_x & \text{para } (x, t) \in Q_T \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{para } x \in \mathbf{R} \\ (u^{m-1}u_x)(x, t) \rightarrow -a & \text{cuando } x \rightarrow \infty, t \in (0, T) \\ (u^{m-1}u_x)(x, t) \rightarrow b & \text{cuando } x \rightarrow -\infty, t \in (0, T) \end{cases}$$

cuando $u_0 \in L^1(\mathbf{R}), u_0 \geq 0, \int u_0 dx = M_0 > 0$ y $a, b \geq 0$, en el marco de la Teoría de Semigrupos No-Lineales. Esto nos permitirá demostrar la existencia de una solución "mild" de (3.3), si previamente probamos que el operador A definido por

$$(3.4) \quad A(u) = -\frac{d^2}{dx^2}(u^m/m) \quad [\text{resp.} -\frac{d^2}{dx^2}(\log x) \text{ if } m = 0]$$

en el dominio

$$(3.5) \quad D(A) = \{u \in L^1(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R}) : u \geq 0, A(u) \in L^1(\mathbf{R})\},$$

$$(u^{m-1}u')(\infty) = -a, (u^{m-1}u')(-\infty) = b\}$$

tiene las propiedades de acretividad, rango y dominio necesarias, para aplicar una versión del Teorema de Generación de Semigrupos de Crandall y Liggett , [16] .

Comenzamos con el estudio del operador A :

Un operador A se dice acretivo en un espacio de Banach X , cuando $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ y para cada $u_1, u_2 \in D(A)$ y $\lambda > 0$ se tiene

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq \|(u_1 + \lambda Au_1 - u_2 - \lambda Au_2)\|_X$$

En el caso de que X sea un Lattice, decimos que A es T-acretivo si

$$\|(u_1 - u_2)^+\|_X \leq \|(u_1 + \lambda Au_1 - u_2 - \lambda Au_2)^+\|_X$$

donde f^+ indica $\max(f, 0)$.

Si A es un operador T-acretivo entonces la ecuación $u + \lambda A(u) = f$, tiene como máximo una solución , y $f_1 \leq f_2$ implica $u_1 \leq u_2$. Para el operador A definido en (3.4) se obtienen los siguientes resultados:

PROPOSICIÓN 3.3.

A es un operador T-acretivo en $L^1(\mathbf{R})$. Además , si $u \in D(A)$, $\lambda > 0$ y $f = u + \lambda A(u) \in L^\infty(\mathbf{R})$ se tiene que $u \in L^\infty(\mathbf{R})$ con $\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

Para $a = b = 0$ este resultado ha sido probado por Crandall y Evans [14] y utilizado en relación con nuestra ecuación en la sección primera del capítulo uno. En el caso $a, b \geq 0$, la demostración es esencialmente la misma y por ello la omitimos.

Una cuestión crucial a la hora de aplicar el Teorema de Generación es el tamaño del rango de $\lambda A + I$, $\lambda > 0$. Para $a = b = 0$ en [14] se prueba que es igual a $\{f \in L^1(\mathbf{R}); \int f(x)dx > 0\}$. Fischer en [21] establece el mismo resultado para no linealidades mas generales. Siguiendo su procedimiento , podemos establecer la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 3.4.

Para $\lambda > 0$, se verifica $R(I + \lambda A) = \{f \in L^1(\mathbf{R}) / \int f > \lambda(a + b)\}$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea

$$\mathcal{M} = \{f \in L^1(\mathbf{R}) : \int f > \lambda(a + b)\}.$$

Consideramos el problema

$$(3.6) \begin{cases} B(v) - \lambda v'' = f & \text{in } \mathbf{R} \\ v'(\infty) = -a, \quad v'(-\infty) = b \\ B(v) \in D(A), \end{cases}$$

con $B(v) = (mv)^{1/m}$ para $m < 0$ y $B(v) = e^v$ para $m = 0$. Vamos a probar que (3.6) es resoluble para $f \in \mathcal{M}$ en dos etapas.

Etapas

El conjunto de las f de \mathcal{M} para las que (3.6) se puede resolver , es cerrado en \mathcal{M} . Para simplificar , tomamos $\lambda = 1$ pues el argumento para $\lambda \neq 1$ es el mismo. También supondremos que $m < 0$, ya que el caso $m = 0$ necesita solamente cambios obvios. Sean

$f_n, f \in \mathcal{M} \subset L^1(\mathbf{R})$, $f_n \rightarrow f$ en L^1 y sean v_n las correspondientes soluciones para f_n . Integrando la ecuación tenemos

$$v'_n(x) = \int_{-\infty}^x (B(v_n) - f_n) + b = \int_x^{\infty} (f_n - B(v_n)) - a.$$

Como $\int f > 0$ y $B(v) > 0$, obtenemos

$$\|v'_n\|_{\infty} \leq \|f_n\|_1 + \min(a, b) \leq C.$$

Por consiguiente, la familia $\{v_n + v_n(0)\}$ es equicontinua en subconjuntos compactos de \mathbf{R} . De donde se deduce ó bien $v_n \rightarrow -\infty$ ó bien v_n converge a una función continua v , siendo en ambos casos la convergencia localmente uniforme. Además, como $\|v'_n\|_1 \leq \|f_n\|_1 + \|B(v)\|_1 \leq 2\|f_n\|_1 \leq C$, v'_n también converge de modo localmente uniforme a una función $\phi \in C(\mathbf{R}) \cap L^{\infty}(\mathbf{R})$. Finalmente, $f_n \rightarrow f$ implica por acretividad $B(v_n) \rightarrow u$ en L^1 , y $u = B(v)$ si $v > -\infty$ ó $u = 0$ si $v = -\infty$.

Ahora, multiplicando la ecuación por v_n y v'_n e integrando

$$(3.7) \quad -\frac{1}{2}v'_n(x)^2 + \frac{1}{2}v'_n(y)^2 + \int_y^x B(v_n(s))v'_n(s)ds = \int_y^x f_n(s)v'_n(s)ds$$

Cuando $y \rightarrow \infty$, de (3.7) se obtiene

$$-\frac{1}{2}v'_n(x)^2 + \frac{1}{2}b^2 + \int_{-\infty}^x B(v_n(s))v'_n(s)ds = \int_{-\infty}^x f_n(s)v'_n(s)ds,$$

lo que implica, para $n \rightarrow \infty$

$$-\frac{1}{2}\phi(x)^2 + \frac{1}{2}b^2 = \int_{-\infty}^x (f - u)(s)\phi(s)ds.$$

Haciendo $x \rightarrow -\infty$, concluimos que $\phi(-\infty) = b$. De la misma forma se obtiene $\phi(\infty) = -a$.

Por otra parte, integrando la ecuación se tiene

$$v'_n(x) - v'_n(y) = \int_y^x (f_n - B(v_n))$$

y cuando $n \rightarrow \infty$ resulta

$$\phi(x) - \phi(y) = \int_y^x (f - u)$$

Si $x \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow -\infty$, obtenemos

$$\int_{\mathbf{R}} u = \int_{\mathbf{R}} f - (a + b) > 0.$$

Lo que prueba que v_n no puede converger a $-\infty$. Claramente ahora se tiene $\phi = v'$ y v resuelve (3.6) con segundo miembro igual a f .

Etapa 2

(4.3) es resoluble en un conjunto denso de \mathcal{M} .

Sea $f \in \mathcal{M} \cap C(\mathbb{R})$ con soporte en $I = [\alpha, \beta]$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Para $x < \alpha$, el problema se convierte en

$$(3.8) \begin{cases} B(v) = v'' & \text{en } I \\ v(\alpha) = \xi, v'(-\infty) = b \end{cases}$$

para algún ξ , que elegiremos después.

El problema (3.8) se resuelve explícitamente mediante la fórmula

$$\int_v^\xi \frac{dv}{(b^2 + 2J(v))} = \alpha - x,$$

siendo J una primitiva de B , es decir $J(v) = \int_{-\infty}^v B(s)ds$. De manera análoga, se soluciona el problema

$$(3.9) \begin{cases} B(v) = v'' & \text{para } \beta < x < \infty \\ v(\beta) = \eta, v'(\infty) = -a. \end{cases}$$

Por último, para resolver el problema en la región intermedia

$$(3.10) \begin{cases} -v'' + B(v) = f & \text{para } \alpha < x < \beta \\ v'(\alpha) = (b^2 + 2J(v(\alpha)))^{1/2} \\ v'(\beta) = -(a^2 + 2J(v(\beta)))^{1/2} \end{cases}$$

partimos desde $x = \alpha$ con valores iniciales $v = \delta, v' = (b^2 + 2J(\lambda(\delta)))^{1/2}$. Sea v_δ la solución correspondiente para $x \geq \alpha$, la cual es fácil de demostrar que existe hasta $x = \beta$. Entonces tenemos

$$v'_\delta(\beta) = v'_\delta(\alpha) + \int_\alpha^\beta v''_\delta(s)ds = (b^2 + 2J(\delta))^{1/2} + \int_\alpha^\beta B(v_\delta(s))ds - \int_\alpha^\beta f(s)ds.$$

Ahora, vamos a considerar

$$E_\delta = (b^2 + 2J(\delta))^{1/2} + (a^2 + 2J(v_\delta(\beta)))^{1/2} + \int_\alpha^\beta B(v_\delta(s))ds - \int_\alpha^\beta f(s)ds.$$

Para δ próximo a 0, $E_\delta \geq (b^2 + 2J(\delta))^{1/2} - \int_\alpha^\beta f > 0$, ya que $J(\delta) \approx \infty$. Por otra parte, cuando $\delta \rightarrow -\infty$, obtenemos que $v_\delta \rightarrow -\infty$ uniformemente en $[\alpha, \beta]$ y por lo tanto $E_\delta \rightarrow b + a - \int_\alpha^\beta f < 0$.

En consecuencia, existe un δ_0 tal que $E_{\delta_0} = 0$.

Para finalizar, si elegimos $\xi = \delta_0, \eta = v_{\delta_0}(\beta)$ obtenemos una solución del problema (3.6) en \mathbb{R} , lo que concluye la demostración. ■

Nota :

Observamos que $D(A) \subset \bigcup_{\lambda > 0} R(I + \lambda A)$. Esta consideración será utilizada cuando resolvamos los esquemas discretos.

Para terminar el estudio de A es necesario determinar su dominio , tarea que llevaremos a cabo usando [19] y una técnica de comparación.

PROPOSICIÓN 3.5.

El cierre de $D(A)$ en $L^1(\mathbf{R}), \overline{D(A)}$, es igual a $L^1_+(\mathbf{R}) = \{f \in L^1(\mathbf{R}) : f \geq 0 \text{ en c.t.p.}\}$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $f \in L^1(\mathbf{R}), f \geq 0$ y $\int f > 0$. En el primer capítulo , hemos construido una solución clásica \tilde{u} de $u_t = (u^{m-1}u_x)_x$ con dato inicial $\tilde{u}(x, 0) = u_0$ y flujo cero. Por consiguiente para $t > 0, t \approx 0$ se tiene $\tilde{u}(\cdot, t) \in D(A_0) = \{u \in L^1(\mathbf{R}) \cap C^1(\mathbf{R}), u > 0, (u_m)'(\pm\infty) = 0, Au \in L^1(\mathbf{R})\}$ y $\tilde{u}(\cdot, t) \rightarrow f$ en $L^1(\mathbf{R})$, cuando $t \rightarrow 0$. Además, $\int \tilde{u}(x, t)dx = \int f(x)dx$.

Sea $\lambda \in (0, \lambda_0)$ con $\lambda_0 = (\int f)/(a+b)$ y sea $\tilde{u}_\lambda = \tilde{u}(y, \lambda)$. Si definimos $f_\lambda = \tilde{u}_\lambda + \lambda A(\tilde{u}_\lambda)$, integrando obtenemos

$$\int f_\lambda = \int \tilde{u}_\lambda = \int f > \lambda(a+b)$$

Por tanto, por la Proposición 3.4 existe $u_\lambda \in D(A)$ tal que

$$u_\lambda + \lambda A(u_\lambda) = f_\lambda$$

Seguidamente, restando las ecuaciones para u_λ y \tilde{u}_λ , y multiplicando por $p(v_\lambda - \tilde{v}_\lambda)$, con $p \in C^1(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R}), p'(s) > 0$ para todo $s \in \mathbf{R}, v_\lambda = u_\lambda^m/m$ y $\tilde{v}_\lambda = \tilde{u}_\lambda^m$ ($v_\lambda = \log(u), \tilde{v} = \log(\tilde{u})$ si $m = 0$) , se llega a

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R (u_\lambda - \tilde{u}_\lambda)p(v_\lambda - \tilde{v}_\lambda)dx &= \lambda \int_{-R}^R (v_\lambda'' - \tilde{v}_\lambda'')p(v_\lambda - \tilde{v}_\lambda)dx \\ &\leq \lambda [(v_\lambda' - \tilde{v}_\lambda')p(v_\lambda - \tilde{v}_\lambda)]_{-R}^R = \lambda [(j(v_\lambda - \tilde{v}_\lambda))']_{-R}^R, \end{aligned}$$

siendo $j(s) = \int_0^s p(r)dr$.

Si $p(s) \rightarrow \text{sign}^+(s)$ y $R \rightarrow \infty$, se tiene

$$\int_{\mathbf{R}} (u_\lambda - \tilde{u}_\lambda)^+ dx \leq 0$$

y por consiguiente $u_\lambda \leq \tilde{u}_\lambda$.

Si ahora , $p(s) \rightarrow \text{sign}^-(s)$, se verifica

$$\int_{\mathbf{R}} (\tilde{u}_\lambda - u_\lambda)dx \leq \lambda(a+b).$$

Consecuentemente , $\|\tilde{u}_\lambda - u_\lambda\|_1 \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow 0$. Como $\tilde{u}_\lambda \rightarrow f$, se obtiene que $f \in \overline{D(A)}$. ■

Este método de comparación , basado en multiplicar por $p(v_1 - v_2)$ e integrar , nos permite probar la siguiente versión del Principio del Máximo.

PROPOSICIÓN 3.6.

Sean $u_i, i = 1, 2$, soluciones en $C^1(\mathbf{R}) \cap L_+^1(\mathbf{R})$ de $u_i + \lambda A(u_i) = f_i$ con $\lambda > 0, f_i \in L_+^1(\mathbf{R})$ y $u_i^{m-1} u_{i,x} \rightarrow -a_i$ (resp. b_i) cuando $x \rightarrow \infty$ (resp. $x \rightarrow -\infty$).

Entonces

$$(3.11) \quad \|(u_1 - u_2)^+\|_1 \leq \|(f_1 - f_2)^+\| + \lambda(a_2 - a_1)^+ + \lambda(b_2 - b_1)^+.$$

En particular, si $f_1 \leq f_2, a_1 \geq a_2$ y $b_1 \geq b_2$, se satisface que $u_1 \leq u_2$

PROPOSICIÓN 3.7.

Para cada $u_0 \in L^1(\mathbf{R}), u_0 \geq 0, \int u_0 = M$ y datos de flujo constantes $a, b \geq 0$, el problema (3.1) tiene una solución "mild" u en un intervalo de tiempo maximal $T = M/(a+b)$ ($t = \infty$ si $a = b = 0$) y tal que, para $0 < t < T$

$$\int u(x, t) dx = M - (a + b)t$$

Además, si $u_i, i = 1, 2$, son dos soluciones con datos $(u_{0,i}, a_i, b_i)$, entonces

$$(3.13) \quad \|(u_1 - u_2)^+(\cdot, t)\|_1 \leq \|(u_{0,1} - u_{0,2})^+(\cdot, t)\|_1 + t\{(a_2 - a_1)^+ + (b_2 - b_1)^+\}$$

DEMOSTRACIÓN:

La demostración se efectúa utilizando la Teoría de Semigrupos No-Lineales. La idea del Teorema de Generación de Semigrupos consiste en considerar una discretización implícita en el tiempo de la ecuación de evolución, que se resuelve iterativamente, para después pasar al límite cuando la longitud de discretización tiende a 0.

Por consiguiente, dada $u_0 \in L_+^1(\mathbf{R}), \int u_0 = M > 0$ y dado $\varepsilon > 0$, tratamos de resolver iterativamente los problemas

$$(3.14) \quad \begin{cases} u_0^\varepsilon = 0 \\ \text{para } k = 1, 2, \dots \quad u_k^\varepsilon \in D(A) \text{ y} \\ (u_k^\varepsilon - u_{k-1}^\varepsilon)/\varepsilon = A(u_k^\varepsilon) \end{cases}$$

Esta iteración solo es posible si $\varepsilon(a+b) < M$. En esta situación, las funciones u_k^ε están bien definidas para $k = 1, \dots, N_\varepsilon$, con $N_\varepsilon = [M/\varepsilon(a+b)]$ ($N_\varepsilon = \infty$ si $a = b = 0$) y $\int u_k dx = M - k(a+b)$. Definiendo

$$u^\varepsilon(t) = u_k^\varepsilon \text{ para } (k-1)\varepsilon < t \leq k\varepsilon$$

obtenemos una función continua a trozos: $[0, T_\varepsilon) \rightarrow L_+^1(\mathbf{R})$, que es una solución ε -aproximada del problema (3.1) en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T_\varepsilon = N_\varepsilon \varepsilon$ y $N_\varepsilon \rightarrow M/(a+b)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0, (T_\varepsilon = \infty \text{ si } a = b = 0)$.

Una vez construida la solución ε -aproximada, la convergencia de u^ε a una función en $C([0, T] : L^1(\mathbf{R}))$ está garantizada por la correspondiente versión del Teorema de Generación de Semigrupos, tomando en este caso el de Kobayasi [26]. De este modo, obtenemos una función $u \in C([0, T] : L^1(\mathbf{R}))$ con $u(0) = u_0$ y $T = M/(a+b)$, llamada solución "mild" de (3.1).

Por último, (3.13) es una consecuencia de (3.11). Por supuesto, una fórmula similar a (3.12) se verifica con $\|(\cdot)^-\|_1$ ó $\|\cdot\|_1$ en vez de $\|(\cdot)^+\|_1$. En particular para a y b fijas, las aplicaciones $S_t : u_0 \rightarrow u(\cdot, t)$ forman un semigrupo ordenado de contracciones en $L_+^1(\mathbf{R})$. ■

Se pueden ver más detalles sobre soluciones mild en [8] y [20].

SECCION 3.

En el mismo marco que en la sección anterior , estudiamos ahora el problema mixto con condiciones de flujo generales

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = (u^{m-1}u_x)_x & \text{para } (x, t) \in Q_T \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para } x \in \mathbf{R} \\ -\lim_{x \rightarrow \infty} (u^{m-1}u_x)(x, t) = f(t) & \text{para } 0 < t < T \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (u^{m-1}u_x)(x, t) = g(t) & \text{para } 0 < t < T. \end{array} \right.$$

utilizando una generalización del metodo de discretización.

Comenzamos suponiendo solo que $f, g \in L^1(0, T)$ y anadiremos más hipótesis , cuando nos sean precisas. En orden a poder encontrar una solución , es preciso recordar algunos hechos de la teoría abstracta:

Dada una familia $\{A(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores acretivos en un espacio de Banach X , el Teorema 1 de Evans [20] nos permite construir una solución "mild" $u \in C([0, T] : L^1(\mathbf{R}))$ del problema de evolución abstracto

$$(3.16) \left\{ \begin{array}{l} (du/dt)(t) + A(t)u(t) = 0, \\ u(0) = u_0, \end{array} \right.$$

si $u_0 \in \overline{D}(A(0))$, y si se verifican las dos siguientes condiciones:

i) Existe una solución ε -aproximada.

ii) Existen λ_0 y una función integrable $h : [0, T] \rightarrow L^1(\mathbf{R})$ tal que

$$(3.17) \quad \|A_\lambda(t)x - A_\lambda(s)x\| \leq \|h(t) - h(s)\|$$

para cada $0 < \lambda < \lambda_0$. Siendo λ la aproximación de Yosida de A , definida como

$$(5.3) \quad A_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda(t)), \quad J_\lambda(t) = (I + \lambda A(t))^{-1}$$

(J_λ está bien definida en $R(I + \lambda A(t))$ por ser $A(t)$ acretivo).

El problema (3.15) se puede plantear en la forma abstracta (3.16) eligiendo $X = L^1(\mathbf{R})$ y siendo $A(t)$ el operador definido en la Sección 1 por (3.2) y (3.3) con $a = f(t)$ y $b = g(t)$. Entonces, $A(t)$ es T-acretivo, $R(I + \lambda A(t)) = \{u \in L^1(\mathbf{R}) : \int u > \lambda(f(t) + g(t))\}$ y $\overline{D}(A(t))$ es $L^1_+(\mathbf{R})$ para todo t .

Ahora podemos escoger una partición \mathcal{P}^n del intervalo $(0, T)$

$$\mathcal{P}^n = \{0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \dots \leq t_k^n \leq \dots \leq t_n^n = T\}$$

tal que las funciones $f^n(t), g^n(t)$ definidas por

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f^n(t) = f(t_k^n) & \text{para } t_{k-1}^n < t \leq t_k^n \\ g^n(t) = g(t_k^n) & \text{para } t_{k-1}^n < t \leq t_k^n \end{array} \right.$$

converjan a f y g , respectivamente, en $L^1(0, T)$. Una partición con estas condiciones se demuestra que existe en [20] para cualesquiera $f, g \in L^1(0, T)$. En el caso de que f, g sean continuas, cualquier partición lo verifica.

Ahora, podemos aproximar (3.16) por el problema discreto

$$(3.20) \quad \begin{cases} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{t_j^n - t_{j-1}^n} + A(t_j^n) u_j^n = 0, & j = 1, \dots, n; \\ u_0^n = u_0. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta los resultados de la Sección 2, es posible resolver el esquema recursivo (3.20) mientras la masa no desaparezca, es decir, hasta un T_n que tiende hacia T , siendo $T = \sup\{t \geq 0 : M_0 > \int_0^t (f + g)(s) ds\}$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto, se satisface la condición anterior (i).

Hacemos notar que, a diferencia del procedimiento seguido en la Sección anterior, aquí necesitamos considerar particiones no igualmente espaciadas.

La condición (ii) es una consecuencia de la siguiente Proposición:

PROPOSICIÓN 3.8.

Sea $u_0 \in R(I + \varepsilon A(s)) \cap R(I + \varepsilon A(t))$. Entonces

$$(3.21) \quad \|J_\varepsilon(t)u_0 - J_\varepsilon(s)u_0\|_1 \leq \varepsilon(|f(t) - f(s)| + |g(t) - g(s)|)$$

DEMOSTRACIÓN:

Sean $u_1 = J_\varepsilon(t)u_0$ y $u_2 = J_\varepsilon(s)u_0$. Tenemos que

$$u_1 + \varepsilon A(u_1) = u_2 + \varepsilon A(u_2) = u_0$$

por lo que

$$u_1 - u_2 = \varepsilon(v_1 - v_2)'',$$

siendo $v_i = u_i^m/m$ if $m < 0$, $v_i = \log u_i$ if $m = 0$, $i = 1, 2$.

Multiplicando por $p(v_1 - v_2)$ con $p \in C^1(\mathbf{R})$, $|p| \leq 1$, $p(0) = 0$, $p' > 0$ e integrando se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R (u_1 - u_2)p(v_1 - v_2) &= \varepsilon \int_{-R}^R (v_1 - v_2)'' p(v_1 - v_2) \\ &\leq \varepsilon (v_1 - v_2)' p(v_1 - v_2) \Big|_{-R}^R = \varepsilon (j(v_1 - v_2))' \Big|_{-R}^R \end{aligned}$$

Si hacemos tender $p(s) \rightarrow \text{sign}(s)$ y después $R \rightarrow \infty$, teniendo en cuenta las condiciones de contorno que toman $A(s)$ y $A(t)$, llegamos a (3.21). ■

Se cumplen por consiguiente las hipótesis del resultado de Evans, lo que implica que existe una solución "mild" $u \in C([0, T] : L^1(\mathbf{R}))$ del problema (3.16).

A continuación, establecemos algunas propiedades de esta solución que nos serán de utilidad en el Capítulo siguiente.

PROPOSICIÓN 3.9.

Sean $u_i, i = 1, 2$, dos soluciones con datos $u_{0,i}, f_i, g_i$. Entonces

$$(3.22) \quad \|(u_1(t) - u_2(t))^+\|_1 \leq \|(u_{0,1} - u_{0,2})^+\|_1 + \int_0^t ((f_2 - f_1)^+ + (g_2 - g_1)^+) d\tau$$

La demostración es inmediata, usando la formula (3.11) para las soluciones aproximadas u^n y después pasando al límite.

Es también inmediata la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 3.10.

Para cada $0 < t < T$

$$M(t) = M_0 - \int_0^t (f + g)$$

PROPOSICIÓN 3.11.

Sea u^n una solución aproximada con $u(0) \in D(A(0))$. Entonces

$$(3.23) \quad \|A(t_k)u_k^n\|_1 \leq \|A(0)u(0)\|_1 + Var_k(f^n) + Var_k(g^n)$$

siendo $Var_k(f)$ la variación de f en $(0, t_k)$.

DEMOSTRACIÓN:

Como $u_k^n + \varepsilon_k A(t_k)u_k^n = u_{k-1}^n$, con $\varepsilon_k = t_k^n - t_{k-1}^n$, tenemos que $J_{\varepsilon_k}(t_k^n)(u_{k-1}^n) = u_k^n$. Si eliminamos, por conveniencia, el subíndice n y tomamos

$$\tilde{u}_{k-1} = u_{k-1} + \varepsilon_k A(t_{k-1})(u_{k-1}), k \geq 1,$$

obtenemos que (con $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$)

$$\begin{aligned} \|u_k - u_{k-1}\| &\leq \|J_{\varepsilon_k}(t_k)u_{k-1} - J_{\varepsilon_k}(t_{k-1})\tilde{u}_{k-1}\| \\ &\leq \|J_{\varepsilon_k}(t_k)u_{k-1} - J_{\varepsilon_k}(t_{k-1})u_{k-1}\| + \|J_{\varepsilon_k}(t_{k-1})u_{k-1} - J_{\varepsilon_k}(t_{k-1})\tilde{u}_{k-1}\| \\ &\leq \varepsilon_k(|f(t_k) - f(t_{k-1})| + |g(t_k) - g(t_{k-1})|) + \varepsilon_k\|A(u_{k-1})\|, \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado (3.21) y el hecho de que J_ε es una contracción en $L^1(\mathbb{R})$.

Finalmente, por la definición de u_k tenemos

$$\|A(t_k)(u_k^n)\| \leq \|A(t_{k-1})(u_{k-1}^n)\| + |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |g(t_k) - g(t_{k-1})|,$$

y por iteración se sigue (3.23). ■

COROLARIO 3.12.

Si $u(0) \in D(A(0))$ entonces u^m (resp. $\log u$) es Lipschitz continua en x , uniformemente en \mathbb{Q}_t .

DEMOSTRACIÓN:

Debido a que $Au = -(u^{m-1}u_x)_x$, la integración de (3.23) nos proporciona la estimación

$$(3.24) \quad |(u^{m-1}u_x)| \leq \|A(0)u_0\| + Var_{(0,t)}(f) + Var_{(0,t)}(g) + \min(f(t), g(t))$$

válida para las aproximaciones u_n . El resultado se obtiene, haciendo $n \rightarrow \infty$ y teniendo en cuenta que $Var_k(f^n) \leq Var(0, t_k)(f) + \varepsilon$, con $\varepsilon \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. ■

CAPITULO IV

UN PROBLEMA MIXTO BIEN PLANTEADO: UNICIDAD Y REGULARIDAD

Probamos en la primera sección, la unicidad de las soluciones del problema (PM) con datos de flujo generales, es decir $f, g \in L^1_{loc}$. Respecto a la regularidad de las soluciones, al igual que hicimos en el anterior capítulo para su construcción, comenzamos estudiando el caso particular de datos de flujo constantes. En este caso, obtenemos la estimación unilateral de la derivada

$$u_t \leq \frac{u}{(1-m)t}$$

lo que nos permitirá demostrar que los datos de flujo se toman continuamente, y por tanto tendremos lo que hemos llamado una solución clásica.

En el caso de flujos generales, aunque supondremos por razones técnicas que $f, g \in L^\infty_{loc}([0, \infty))$, no es siempre cierta la anterior estimación. Solamente la obtenemos en el caso de que $f(t)t^{m/m-1}$ y $g(t)t^{m/m-1}$ sean funciones no decrecientes de t , aunque se puede obtener una estimación de la forma

$$u_t \leq Ku$$

si $f, g \in C^1(0, \infty)$ y existe $C > 0$ tal que $f_t + C_f \geq 0, g_t + C_g \geq 0$. Es por tanto, que solamente en estas condiciones sobre los flujos podemos obtener una solución clásica.

Para flujos generales, se tiene que la solución toma las condiciones de flujo en el sentido débil definido anteriormente.

Finalmente probamos que si la solución se extingue en tiempo finito, es decir $T < \infty$, entonces

$$u(x, t) \leq O((T - t)^{1/m+1})$$

cuando $t \approx T$.

SECCION 1.

TEOREMA 4.1. *La solución del problema (PM) es única.*

La estrategia de la demostración se basa en considerar la siguiente integral de la solución u :

$$(4.1) \quad U(x, t) = \int_0^x u_0(s) ds + \int_0^t (u^{m-1} u_x)(x, \tau) d\tau$$

y en demostrar que U es una solución clásica de una ecuación parabólica para la que la unicidad se verifica. Supondremos que $u_0 \in L^1(R), f, g \in L^1_{loc}([0, \infty))$ y que $u \in C([0, T) : L^1(R))$ es una solución clásica de (E) que toma los datos u_0, f, g en el sentido que hemos descrito en la introducción del Capítulo tercero.

LEMA 4.2. Para cada solución u de (P.M), la función U está bien definida, $U \in C([-\infty, \infty] \times [0, T]) \cap C^\infty(Q_T)$ y resuelve el problema

$$(4.2) \quad \begin{cases} U_t = |U_x|^{m-1} U_{xx} \\ U(x, 0) = U_0(x) \\ U(-\infty, t) = G(t), U(+\infty, t) = F(t) \end{cases}$$

siendo

$$(4.3) \quad \begin{cases} U_0(x) = \int_0^x u_0(s) ds \\ F(t) = \int_0^\infty u_0(s) ds - \int_0^t f(\tau) d\tau \\ G(t) = \int_0^{-\infty} u_0(s) ds + \int_0^t g(\tau) d\tau \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Para $\theta \in (0, T)$, definimos las funciones auxiliares

$$(4.4) \quad U^\theta(x, t) = \int_0^x u(x, \tau) ds + \int_\theta^t (u^{m-1} u_x)(x, \tau) d\tau$$

las cuales, usando la ecuación (E), también se pueden escribir como

$$(4.5) \quad U^\theta(x, t) = \int_\theta^t (u^{m-1} u_x)(0, \tau) d\tau + \int_0^x u(s, t) ds$$

Es claro que U^θ satisface

i) $U^\theta \in C^\infty(R \times [\theta, T])$, $U_x^\theta = u > 0$

ii) $U_t^\theta = |U_x^\theta|^{m-1} U_{xx}^\theta$

ii) U^θ es continua para $-\infty \leq x \leq \infty, \theta \leq t \leq T$ y

$$U^\theta(\infty, t) = \int_0^\infty u(s, \theta) ds - \int_\theta^t f(\tau) d\tau,$$

$$U^\theta(-\infty, t) = \int_0^{-\infty} u(s, \theta) ds + \int_0^t g(\tau) d\tau$$

Probamos ahora que U^θ converge uniformemente cuando $\theta \rightarrow 0$. Para ello, consideramos para $0 < \theta_1 < \theta_2 < T$ la diferencia

$$E(x, t) = U^{\theta_2}(x, t) - U^{\theta_1}(x, t)$$

Usando (4.5) vemos que la función

$$E = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (u^{m-1} u_x)(0, \tau) d\tau$$

es independientemente de x y t . Además, por (4.4)

$$E = E(\infty, t) = \int_0^\infty (u(s, \theta_2) - u(s, \theta_1)) ds + \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\tau) d\tau$$

Como $u \in C([0, T) : L^1(R))$ y $f \in L^1_{loc}([0, T))$, concluimos que $E \rightarrow 0$ uniformemente cuando $\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0$. Por consiguiente, existe el límite uniforme $U = \lim U^\theta$ cuando $\theta \rightarrow 0$. Claramente, U satisface (4.1) y (4.2). Observemos que $U_x = u > 0$ y U también se puede expresar como

$$U(x, t) = \int_0^t (u^{m-1} u_x)(0, \tau) d\tau + \int_0^x u(s, t) ds$$

■

LEMA 4.3. El problema (4.2) admite una única solución clásica $U \in C([-\infty, \infty] \times (0, T)) \cap C^\infty(Q_T)$ con $U_x > 0$.

DEMOSTRACIÓN: Sean U_1 y U_2 dos soluciones que cumplen las condiciones del enunciado y sea

$$w(x, t) = U_1(x, t) - U_2(x, t)$$

Entonces, w es una solución clásica de la ecuación parabólica

$$w_t = a(x, t)w_{xx} + b(x, t)w_x$$

siendo

$$a(x, t) = |U_{2x}|^{m-1}$$

y

$$b(x, t) = \frac{U_{1,xx}}{|U_{1,x}|^\alpha |U_{2,x}|^\alpha} \frac{|U_{2,x}|^\alpha - |U_{1,x}|^\alpha}{U_{1,x} - U_{2,x}}$$

con $\alpha = 1 - m \geq 1$.

Puesto que a y $b \in C^\infty(Q_T)$ con $a > 0$, w no puede tener un máximo o un mínimo en el interior de Q_T . Por otra parte, w se anula continuamente en la frontera parabólica consistente en $\{x \in R, t = 0\}$ y $\{x = \pm\infty, 0 \leq t < T\}$. Concluimos por tanto que $w \equiv 0$, con lo que finalizamos la demostración. ■

SECCION 2.

Comenzamos el estudio de la regularidad de la solución "mild" del problema (PM) con datos de flujo constantes, probando que dicha solución es débil si el dato inicial está en el dominio del operador A .

PROPOSICIÓN 4.4. Sea $u_0 \in D(A)$ y sea u la solución "mild" de (3.3). Entonces, para cada $\eta \in C^1(R \times [0, T])$ anulándose para t próximo a T y para $|x|$ suficientemente grande, tenemos:

$$(4.6) \quad \int_0^T \int_R \left[u \eta_t - \left(\frac{u^m}{m} \right)_x \eta_x \right] dx dt = \int_R u_0(x) \eta(x, 0) dx = 0$$

DEMOSTRACIÓN:

i) Sea u_1^ε la solución ε -aproximada para $\varepsilon > 0$. Como para $k \geq 1$ $u_k^\varepsilon + \varepsilon A(u_k^\varepsilon) = u_{k-1}^\varepsilon$, la acreatividad de A implica

$$\|u_{k-1}^\varepsilon - u_k^\varepsilon\| \leq \|(u_{k-1}^\varepsilon + \varepsilon A u_{k-1}^\varepsilon) - (u_k^\varepsilon + \varepsilon A u_k^\varepsilon)\|_1 = \varepsilon \|A u_{k-1}^\varepsilon\|_1$$

es decir, $\|A u_k^\varepsilon\|_1 \leq \|A u_{k-1}^\varepsilon\|_1$. Recursivamente, obtenemos para todo k

$$(4.7) \quad \|A u_k^\varepsilon\|_1 \leq \|A u_0\|_1$$

Como $Au = -(u^{m-1}u)_x$, la integración de (4.7) nos proporciona la siguiente estimación

$$(4.8) \quad \left| \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} (u_k^\varepsilon(x, t)) \right| \leq (A u_0)_1 + \min(a, b)$$

Esta acotación es uniforme en ε, x, t y podemos pasar al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y $u^\varepsilon \rightarrow u$. En particular, $(u_k^\varepsilon)_x \rightarrow (u^m)_x$ en la topología débil $*$ de $L^\infty(Q_T)$.

Consideramos ahora la expresión análoga de (4.6) para $u = u^\varepsilon$, siendo η_t reemplazada por $\delta_t^\varepsilon \eta = \frac{1}{\varepsilon} [\eta(x, t + \varepsilon) - \eta(x, t)]$. También, tomamos $tk = k\varepsilon, k = 0, 1, \dots, N$ y escogemos ε suficientemente pequeño de modo que $\eta \equiv 0$ para $T - 2\varepsilon < t < T$. Entonces

$$\begin{aligned} \iint u^\varepsilon \delta_t^\varepsilon \eta dx dt &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^N \int dx \int_{t_{k-1}}^{t_k} u_k^\varepsilon(x) [\eta(x, t + \varepsilon) - \eta(x, t)] dt \\ &= \sum_{k=1}^N \int dx \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{u_{k-1}^\varepsilon - u_k^\varepsilon}{\varepsilon} \eta dt - \frac{1}{\varepsilon} \int dx \int_0^\varepsilon u_0^\varepsilon \eta dt \end{aligned}$$

Utilizando (3.14) e integrando por partes se obtiene

$$\iint u^\varepsilon \delta_t^\varepsilon \eta dx dt - \iint ((u_k^\varepsilon)^m / m)_x \eta_x dx dt + \int dx u_0 \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \eta dt \right) = 0$$

Ahora, podemos pasar al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y obtenemos (4.11) ■

PROPOSICIÓN 4.5.

Sea $u_0 \in \overline{D(A)}$ y sea u la solución "mild" de (3.1). Entonces

$$(4.9) \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \|u(t+h) - u(t)\|_1 \leq \frac{2\|u_0\|_1}{(1-m)t} + \frac{m}{m-1}(a+b)$$

DEMOSTRACIÓN: Escribimos $u(t)$ ya que es igual a $u(\cdot, t)$ tomado como elemento de $L^1(\mathbb{R})$. También llamaremos $S(t; u_0, a, b)$ a la solución "mild" u en el tiempo t . La homogeneidad del operador A implica que para $\lambda > 0$

$$S(\lambda t; u_0, a, b) = \lambda^{\frac{1}{m-1}} S(t; \lambda^{\frac{1}{m-1}} u_0, \lambda^{\frac{m}{m-1}} a, \lambda^{\frac{m}{m-1}} b)$$

Sea $\lambda = 1 + h/t$ para $0 < t < T$ y $h > 0, h+t < T$. Entonces

$$(4.10) \quad \begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= S(\lambda t; u_0, a, b) - S(t; u_0, a, b) = \\ &\lambda^{\frac{1}{1-m}} [S(t; \lambda^{\frac{1}{m-1}} u_0, \lambda^{\frac{m}{m-1}} b) - S(t; u_0, a, b)] + (\lambda^{\frac{1}{m-1}} - 1) S(t; u_0, a, b) \end{aligned}$$

Nos servimos de (3.13) para estimar el primer término del lado derecho y de (3.12) para el último término, y llegamos a

$$\|u(t+h) - u(t)\|_1 \leq 2|\lambda^{\frac{1}{1-m}}| \|u_0\|_1 + |\lambda - \lambda^{\frac{1}{1-m}}| t(a+b),$$

por lo que se sigue (4.9) dividiendo por h y tendiendo h a 0 ■

NOTA. La estimación no depende de (a, b) cuando $m = 0$

PROPOSICIÓN 4.6.

En las mismas hipótesis de la proposición anterior

$$(4.11) \quad u_t \leq \frac{u}{(1-m)t} \quad \text{en } \mathcal{D}'(Q_T)$$

DEMOSTRACIÓN:

Al igual que en la proposición 4.5, escribimos

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= \lambda^{\frac{1}{1-m}} [S(t; \lambda^{\frac{1}{m-1}} u_0, \lambda^{\frac{m}{m-1}} a, \lambda^{\frac{m}{m-1}} b) - S(t; u_0, a, b)] \\ &+ (\lambda^{\frac{1}{m-1}} - 1) S(t, u_0, a, b). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\lambda^{\frac{1}{1-m}} < 0$, y $\lambda^{\frac{m}{m-1}} > 1$, por el principio del máximo, establecido en (3.11), tenemos que

$$u(t+h) - u(t) \leq (\lambda^{\frac{1}{m-1}} - 1)u(t)$$

Dividiendo por h y haciendo $h \rightarrow 0$, obtenemos el resultado (4.11). ■

TEOREMA 4.7. Existe una solución del problema (3.3), ((PM) con datos de flujos constantes), que toma los datos de flujo continuamente. Además, la solución existe hasta el tiempo maximal $T = M_0/(a+b)$ y

$$u_t \leq \frac{u}{(1-m)t} \quad \text{en } Q_T$$

$$\|u_t\|_1 \leq \frac{2\|u_0\|_1}{(1-m)t} + \frac{m}{m-1}(a+b)$$

DEMOSTRACIÓN:

i) Consideramos $u_0 \in D(A)$. También suponemos $m < 0$; el caso $m = 0$ solo requiere pequeños cambios.

Sea u la solución de (3.3). Por (4.8), en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, sabemos que

$$(4.12) \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} u^m \right| \leq |m|(\|Au_0\|_1 + \min(a, b)),$$

lo que indica que en c.t.p. $t > 0$, $u^m(x, t)$ es Lipschitz-continua en x , y en consecuencia como $m < 0$, $u(x, t)$ es positiva en \mathbb{R} para c.t.p. t .

Establecemos ahora un módulo de continuidad para u en (x, t) . De (4.12), se sigue

$$(4.13) \quad |u_x| = \left| \left(\frac{u^m}{m} \right)_x \right| u^{1-m} \leq \|u\|_\infty^{1-m} \left| \left(\frac{u^m}{m} \right)_x \right| \leq \|u_0\|_\infty^{1-m} (\|A\phi\|_1 + \min(a, b)) = C_1$$

Sean $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 < t_0 < t_1 < T$ y tomamos $\delta = |u(x_0, t_1) - u(x_0, t_0)|$ e $I = \{y \in \mathbb{R} : |y - x_0| < \delta/3C_1\}$. Para cada $y \in I$, se tiene

$$|u(y, t_1) - u(y, t_0)| \geq |u(x_0, t_1) - u(x_0, t_0)| - 2C_1|y - x_0| \geq \frac{\delta}{3},$$

Por consiguiente, para $0 < t_0 < t_1 < T$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\delta|I| &= \frac{2}{9}\delta^2 C_1 \leq \int_I |u(x, t_1) - u(x, t_0)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |u(x, t_1) - u(x, t_0)| dx \leq \frac{|t_1 - t_0|}{(1-m)t_0} (2\|u_0\|_1 + |m|t_0(a+b) + o(|t_1 - t_0|)), \end{aligned}$$

debido a (4.9), y concluimos que

$$\delta = |u(x_0, t_1) - u(x_0, t_0)| \leq C_2 \left(\frac{t_1 - t_0}{t_0} \right)^{1/2} + o(t_1 - t_0)^{1/2}.$$

Esta desigualdad y (4.13), implican un módulo de continuidad de la forma

$$(4.14) \quad |u(x_1, t_1) - u(x_0, t_0)| \leq C_1|x_1 - x_0| + C_3|t_1 - t_0|^{1/2}$$

con C_1 dependiendo de $\|u_0\|_1, a$ y b y C_3 dependiendo también de t_0 . Por tanto, deducimos que u es continua y positiva en Q_T . Además como u es solución débil por la proposición 4.3, la teoría cuasilineal estandar nos dice que $u \in C^\infty(Q_T)$, por lo que las estimaciones (4.14) y (4.16) son clásicas.

ii) Probamos ahora que u toma los datos de flujo de manera continua. Para cada $t > 0$ fijo, la función

$$\psi_t(x) = (u^{m-1}u_x)(x, t) - \frac{1}{(1-m)t} \int_0^x u(y, t) dy$$

es no creciente por (4.16). Y como $u(\cdot, t) \in L^1(R)$, existen los límites

$$(4.15) \quad -\lim_{x \rightarrow \infty} (u^{m-1}u_x) = L^+(t), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (u^{m-1}u_x) = L^-(t).$$

Además

$$(4.16) \quad L^+(t) + L^-(t) = - \int_{\mathbf{R}} (u^{m-1}u_x)_x dx = - \int_{\mathbf{R}} u_t dx = -M'(t) = a + b.$$

Veamos que $L^+(t) \leq a$. Para ello, sea u_ε una solución ε aproximada de u , la cual toma un conjunto discreto de valores como aplicación de $[0, T)$ en $L^1(R)$, y para cada uno de ellos se toman los datos de flujo. Por tanto, para cada $t \in (0, T)$ fijo:

$$((u^\varepsilon)^{m-1}u_x^\varepsilon)(x, t) = -a + \int_x^\infty A(u^\varepsilon(t)) dx$$

Puesto que $A(u^\varepsilon(t)) \in L^1(R)$, para $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$|(u^\varepsilon)^{m-1}u_x^\varepsilon + a| \leq \varepsilon \quad \text{para } x > R$$

lo que implica

$$(u^\varepsilon)^m(x, t) \leq |m|(a + \varepsilon)(x - R) + C(R)$$

así que

$$(4.17) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(u^\varepsilon)^m(x, t)}{x} \leq |m|a \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log u}{x} \leq a \text{ si } m = 0 \right)$$

Como $u^\varepsilon \rightarrow u$ en c.t.p., concluimos que (4.17) se verifica para u , $0 < t < T$. Esto implica que $L^+(t) \leq a$.

Del mismo modo, podemos demostrar que $L^-(t) \leq b$. Estas desigualdades junto con (4.16) nos prueban $L^+(t) = a$, $L^-(t) = b$. Además, ya que las funciones $\psi_t(x)$ son monótonas en x , continuas en t y las integrales $\int_0^x u(y, t) dy$ convergen uniformemente en t cuando $x \rightarrow \infty$, podemos aplicar el Teorema de Dini y los límites (4.15) son localmente uniformes en $0 < t < T$. La convergencia de la integral se comprueba en el caso de que u sea una solución maximal, utilizando la tasa de decaimiento, y para cualquier otra solución, el mismo resultado se sigue por comparación.

ii) Eliminamos la restricción $u_0 \in D(A)$.

Utilizando que $\overline{D(A)} = L^1_+(R)$, podemos aproximar $u_0 \geq 0, u_0 \neq 0$ y $u_0 \in L^1(R)$ por una sucesión $u_{0,n} \in D(A)$

Sean u_n las soluciones correspondientes, debido a la propiedad (3.13) de contracción en $L^1_+(R)$ para datos de flujos fijos, u_n converge a u uniformemente en t , $u \in C([0, \infty); L^1(R))$ y $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ cuando $t \rightarrow 0$ en $L^1(R)$.

Por último, indicamos que los datos de flujo se toman en el sentido requerido, siguiendo la demostración anterior, en donde se reemplaza la estimación (4.14) por

$$\left| \left(\frac{u^m}{m} \right)_x \right| \leq \left| \int u_t dx \right| \leq \frac{2\|u_0\|_1}{(1-m)t} + \frac{m}{m-1}(a+b)$$

la cual es válida para las soluciones aproximadas u_n y en el límite es válida también para u .

Sección 3.

Para demostrar los teoremas de regularidad en el caso de flujos no constantes, estableceremos previamente los siguientes lemas, en la misma línea que las proposiciones (4.4) y (4.5) de la sección anterior. Observaremos que es necesario para ello suponer condiciones adicionales sobre los flujos.

LEMA 4.8.

Sean f y $g \in BV(0, T)$. Entonces

$$(4.18) \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \|u(t+h) - u(t)\|_1 \leq \frac{2\|u_0\|_1}{(1-m)t} + \frac{m}{(m-1)t} \int_0^t (f(s) + g(s)) ds + \frac{1}{t} \int_0^t s(|df|(s) + |dg|(s)).$$

DEMOSTRACIÓN:

Utilizando la misma notación que en la proposición (4.4), se tiene

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= \lambda^{\frac{1}{1-m}} \left[S(t; \lambda^{\frac{1}{m-1}} u_0, \lambda^{\frac{m}{m-1}} f_\lambda, \lambda^{\frac{m}{m-1}} g_\lambda) - S(t; u_0, f_\lambda, g_\lambda) \right] \\ &+ \lambda^{\frac{1}{1-m}} [S(t; u_0, f_\lambda, g_\lambda) - S(t; u_0, f, g)] + (\lambda^{\frac{1}{1-m}} - 1) S(t; u_0, f, g), \end{aligned}$$

siendo $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$, $g_\lambda(t) = g(\lambda t)$, $\lambda = 1 + h/t$.

Usando (3.22) para estimar el primer y segundo términos y (3.23) para el último término, obtenemos

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\| &\leq 2|\lambda^{\frac{1}{1-m}} - 1| \|u_0\|_1 + |\lambda - \lambda^{\frac{1}{1-m}}| \int_0^t (f_\lambda(\tau) + g_\lambda(\tau)) d\tau + \\ &\lambda^{\frac{1}{1-m}} \left(\int_0^t |f_\lambda(\tau) - f(\tau)| d\tau + \int_0^t |g_\lambda(\tau) - g(\tau)| d\tau \right) \end{aligned}$$

Si dividimos por λ y hacemos λ tender a 0, los dos primeros términos de (4.18) se obtienen de forma inmediata. Para estimar el último término observamos que (con $\varepsilon = h/t$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^t |f_\lambda(\tau) - f(\tau)| d(\tau) &= \frac{1}{h} \int_0^t |f(\tau + \varepsilon\tau) - f(\tau)| d(\tau) \leq \frac{1}{h} \int_0^t dt \int_\tau^{\tau+\varepsilon\tau} |f'(s)| ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \frac{s}{1+\varepsilon} |f'(s)| ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f'(s)| \frac{t+h-s}{1+\varepsilon} ds, \end{aligned}$$

Si $h \rightarrow 0$ la anterior estimación tiende a $\frac{1}{t} \int_0^t |f'(s)| s ds$ ■

(Hemos supuesto por simplicidad que df es una función. Si df es una medida, solamente cambia la demostración en la notación, que se hace peor o más complicada).

NOTA. Si f y g son funciones no-decrecientes, (4.18) se convierte en

$$\begin{aligned} (4.19) \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \|u(t+h) - u(t)\|_1 &\leq \frac{2\|u_0\|_1}{(1-m)t} + f(t) + g(t) \\ &- \frac{1}{(1-m)t} \int_0^t (f(t) + g(t)) dt \leq \frac{2\|u_0\|_1}{t} + (f(t) + g(t)). \end{aligned}$$

LEMA 4.9.

Si $f(t)t^{m/m-1}$ y $g(t)t^{m/m-1}$ son funciones no decrecientes de t en $(0, t_1)$, $0 < t_1 \leq T$, entonces

$$(4.20) \quad u_t \leq \frac{u}{(1-m)t} \quad \text{en } \mathcal{D}'(Q_{t_1})$$

DEMOSTRACIÓN:

Escribimos ahora la diferencia $u(t+h) - u(t)$ en la forma

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= \lambda^{\frac{1}{1-m}} \left[S(t, \lambda^{\frac{1}{1-m}} u_0, \lambda^{\frac{m}{1-m}} f_\lambda, \lambda^{\frac{m}{1-m}} g_\lambda - S(t; u_0, f, g) \right] + \\ &(\lambda^{\frac{1}{1-m}} - 1) S(t; u_0, f, g), \end{aligned}$$

Observando que $\lambda^{\frac{1}{1-m}} u_0 \leq u_0$, $\lambda^{\frac{m}{1-m}} f_\lambda \geq f$, $\lambda^{\frac{m}{1-m}} g_\lambda \geq g$, por (3.22) concluimos que el primer término del segundo miembro es ≤ 0 . Ahora, al igual que en la Proposición 4.5, el resultado se obtiene haciendo $h \rightarrow 0$ ■

COROLARIO 4.10.

Sean $f, g \in C^1(0, T)$ y supongamos que existe $C \geq 0$ tal que

$$(4.21) \quad f_t + Cf \geq 0, \quad g_t + Cg \geq 0$$

Entonces u_t/u está acotada superiormente para $\tau < t < T$, $\tau > 0$.

DEMOSTRACIÓN:

Fijamos $t \in (\tau, T)$ y escogemos un nuevo origen de tiempos t_0 tal que $t_0 > \tau/2$, $t - t_0 < h = (m/m - 1)C$ y $t - t_0 \geq \min(\tau/2, h/2) = h_1$. Si consideramos u como una solución que parte de $t = t_0$ con tiempo $t' = t - t_0$, entonces (4.21) implica que las condiciones de crecimiento del lema 4.9 se cumplen para $0 < t' - t_0$, por lo que

$$(4.22) \quad u_t \leq \frac{u}{(1-m)(t-t_0)} \leq \frac{u}{(1-m)h_1} = Ku$$

con K dependiendo de m, τ y C . ■

NOTA. Como u está acotada para $t \geq \tau > 0$, u_t está acotada superiormente en el mismo dominio.

Podemos ya proceder a demostrar los siguientes Teoremas de existencia y regularidad. El plan de la demostración es similar al caso de flujos constantes.

TEOREMA 4.11.

Para cada $u_0 \in L^1(R)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \neq 0$ y para cada par de funciones de flujo $f, g \in L_{loc}^\infty[0, \infty)$, $f, g \geq 0$, existe una solución del problema (PM), $u \in C([0, T) : L^1(R))$. El intervalo de tiempo maximal está dado por

$$T = \sup\{t \geq 0 : M_0 > \int_0^t (f+g)(s)ds\}.$$

Además, para $0 < t < T$

$$M(t) = M_0 - \int_0^t (f+g).$$

Finalmente, $u(\cdot, t) \rightarrow 0$ uniformemente cuando $t \rightarrow T$.

TEOREMA 4.12.

Sea $u_0 \in C(R)$, $f, g \in C^1(R)$ y supongamos que existe $C > 0$ tal que

$$f_t + Cf \geq 0, \quad g_t + Cg \geq 0 \quad \text{en } (0, T).$$

Entonces u es una solución clásica del problema (PM).

Realizamos primero la demostración de este teorema

DEMOSTRACIÓN:

Caso 1: $u_0 \in D(A)$, $f, g \in C^1(0, \infty)$ y verificando (4.21).

En estas condiciones, podemos aplicar el Corolario 4.10, y u^m (resp. $\log u$) es Lipschitz continua uniformemente en x , lo que junto a $\int u(x, t)dt > 0$ indica que $\forall x \in R$ y en c.t.p. $t \in (0, T)$, $u(x, t) > 0$.

Siguiendo los pasos del Teorema 4.7, deducimos que u es H'lder continua sirviéndonos de (4.18). Por tanto $u(x, t) > 0$ en Q_T y la teoría standard nos dice que $u \in C^\infty(Q_T)$.

Al igual que en el caso de flujos constantes, se establece que los datos de flujo se toman continuamente, sin más que reemplazar la función ψ_t por

$$\psi_t(x) = u^{m-1}u_x(x, t) - K \int_0^x u(y, t)dy$$

Caso 2: $u_0 \in L^1(\mathbf{R})$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$ y f, g en las condiciones del caso anterior.

Aproximamos u_0 en $L^1(\mathbf{R})$ por una sucesión $u_{0,n} \in D(A(0))$ y sean u_n las correspondientes soluciones. Por la proposición 3.9, las soluciones u_n convergen a u en $C([0, T) : L^1(\mathbf{R}))$.

La propiedad de que u^m es Lipschitz continua es obtenida de la estimación

$$|((u^n)^m/m)_x| \leq \|u_t^n\|_1 + \min(f(t), g(t)) < C, \quad \text{si } t \geq \tau$$

ya que el Corolario 3.12 no es válido en este caso.

En estas condiciones, podemos ya aplicar el resto de la demostración.

Además si $u_0 \in C(\mathbf{R})$ por argumentos estandar de tipo barrera obtenemos que el dato inicial se toma continuamente. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.11:

Aproximamos f y g por dos sucesiones no decrecientes de funciones $f_n, g_n \in C^1(0, \infty)$, acotadas y satisficiendo (4.12) con constantes C_n . Por el principio del máximo (3.22), las soluciones u_n forman una familia no decreciente y $u_n \rightarrow u$ en $C([0, T) : L^1(\mathbf{R}))$. Puesto que toda la familia u_n está acotada superiormente por la solución maximal \hat{u} con el mismo dato inicial u_0 , tenemos que $u_n \rightarrow u$ uniformemente en $x \in \mathbf{R}$, $0 < \tau < t < T$ y u es una solución clásica de la ecuación.

La novedad de este caso respecto del Teorema anterior, es el modo en el que se toman los flujos.

Sea $x \in \mathbf{R}$, $0 < \tau < t < T$ y sea \hat{u} la solución maximal con el mismo dato inicial u_0 . Entonces para $u = u_n$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau}^t (u^{m-1}u_x)(x, s)ds - \int_{\tau}^t g(s)ds \right| &= \left| \int_{-\infty}^x (u(y, t) - u(y, \tau))dy \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^x (|\hat{u}(y, t)| + |\hat{u}(y, \tau)|)dy \leq C(\hat{u}, t, x) \end{aligned}$$

ya que $\hat{u} \in C([0, T) : L^1(\mathbf{R}))$. Además $C \rightarrow 0$ si $x \rightarrow -\infty$

Pasando al límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la estimación anterior, obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \int_{\tau}^t (u^{m-1}u_x)(x, s)ds - \int_{\tau}^t g(s)ds \right| = 0,$$

uniformemente en $0 < t < T$. Análogamente se procede para f , cuando $x \rightarrow \infty$.

Finalizamos la demostración probando que $u(\cdot, t) \rightarrow 0$ uniformemente en x cuando $t \rightarrow T$. El caso $T = \infty$ se obtiene como una consecuencia de la estimación sobre el decrecimiento

$$(4.23) \quad u(x, t) \leq c(m)(M^2/t)^{\frac{1}{m+1}}$$

para la solución maximal.

Cuando $T < \infty$, tomamos un tiempo $t_1 = T - \varepsilon$ y estimamos la masa en $t_2 = T - 2\varepsilon$

$$M(t_2) = \int_{t_2}^T (f + g) \leq (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)2\varepsilon$$

Sustituyendo en (4.23) para $t = t_1$ con origen de tiempo t_2 , tenemos $t - t_2 = \varepsilon$ y (4.23) se convierte en

$$u(x, t) \leq c(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)^{\frac{2}{m+1}}(4\varepsilon)^{\frac{1}{m+1}} = o((T - t)^{\frac{1}{m+1}})$$

■

CAPITULO V

TRAZAS INICIALES DE SOLUCIONES MAXIMALES

El propósito de este capítulo es proporcionar una teoría completa de existencia, unicidad y trazas uniciales para la clase de soluciones maximales del Problema de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} (E) & u_t = (u^{m-1}u_x)_x \\ & u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

siendo $u_0 \in \mathcal{M}_+(R)$, el conjunto de las medidas de Borel no-negativas, no triviales y localmente acotadas.

Las propiedades de las soluciones maximales han sido estudiadas en los dos primeros capítulos, y en particular pueden ser caracterizadas por la condición de decrecimiento

$$(5.1) \quad u^m = o(|x|), \quad \text{si } |x| \rightarrow \infty \text{ loc. uniforme en } t.$$

Es decir, esta condición nos ha permitido singularizar una solución del problema (PC) con dato inicial en $L^1(\mathbf{R})$ y $L^1_{loc}(\mathbf{R})$.

En este capítulo, entenderemos por una buena solución de la ecuación (E), una función u definida en una banda $\mathbf{Q}_T = \mathbf{R} \text{ times } (0, T)$, $0 < T < \infty$, positiva y C^∞ , que es solución de (E) y que satisface la condición (5.1).

Probaremos en la primera sección, que toda buena solución tiene una traza inicial μ cuando $t \rightarrow 0$, que es una medida de Borel localmente finita. Para ello, serán esenciales el lema 5.2 para $-1 < m < 0$ y el lema 5.3 en el caso $m = 0$ puesto que nos van a proporcionar una forma integral de la desigualdad de Harnack que controlará la variación en el tiempo de la masa contenida en un intervalo finito.

En las siguientes secciones, probaremos la existencia y unicidad de buenas soluciones para el problema (PC), siendo nuestro propósito final demostrar que estas buenas soluciones coinciden con las soluciones maximales del problema de Cauchy general.

SECCIÓN 1.

Consideramos soluciones de (E), sin referencia al dato inicial; es decir, funciones u definidas en $0 < T \leq \infty$, tales que para cada $\tau > 0$, $u^\tau(x, t) = u(x, t + \tau)$ es la solución maximal de (PC) con dato inicial $u(x, \tau) \in L^1_{loc}(R)$. Por tanto, u^τ posee todas las propiedades de estas soluciones, en particular las estimaciones puntuales de sus derivadas. Haciendo $\tau \rightarrow 0$, obtenemos las mismas estimaciones para u :

$$(5.2) \quad -\frac{u}{(1+m)t} \leq u_t \leq \frac{u}{(1-m)t}$$

y

$$(5.3) \quad -\frac{1}{(1+m)t} \leq v_{xx} \leq \frac{1}{(1-m)t}$$

Utilizando (5.2), probaremos que las buenas soluciones satisfacen estimaciones más críticas, cuando $|x| \rightarrow \infty$, que la estimación (5.1).

LEMA 5.1.

Para cada u , buena solución de (E) y para cada $\tau \in (0, T)$ existe una función positiva $g(x)$ tal que si $|x| \rightarrow \infty$, $g(x) = O(|x|^2)$ y

$$(5.4) \quad u^{m-1} \leq \frac{g(x)}{t}, \quad \text{si } x \in \mathbb{R}, 0 < t \leq \tau$$

Se puede elegir g simétrica y creciente para $x > 0$. Además, $g(x)/|x|^2 \rightarrow m-1/2(m+1)$ si $|x| \rightarrow \infty$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $u(0, \tau) = c > 0$. La desigualdad de (5.2), $u_t \leq u/(1-m)t$, implica que $u(x, t)t^{\frac{-1}{1-m}}$ es no creciente en t , para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo. En particular

$$u(0, t) \geq u(0, \tau)(t/\tau)^{\frac{-1}{1-m}} = c_1 t^{\frac{-1}{1-m}}, \quad 0 < t \leq \tau$$

y se cumple (5.4) para $x = 0$.

En orden a obtener (5.4) para $x > 0$, consideramos en la semibanda $\mathbb{R}^+ \times (0, \tau)$ la función

$$w_0(x, t) = \left\{ \frac{2(1+m)t}{(1-m)(x+d)^2} \right\}^{\frac{-1}{1-m}}, \quad d > 0$$

obtenida de (0.3), tomando $c = 0$ y desplazando el origen en x . Por definición, w_0 es una solución de (E) que satisface (5.1) y toma el valor inicial $w_0(x, 0) = 0$ para $x > 0$. Además, si elegimos d de forma que

$$d^2 \geq \frac{2(1+m)}{(1-m)c_1^{\frac{1}{1-m}}}$$

se tiene que $w_0(0, t) \leq u(0, t)$, para $0 \leq t \leq \tau$.

Ahora, aplicando el lema 2.1, obtenemos $u(x, t) \geq w_0(x, t)$ para $x > 0, 0 < t \leq \tau$, lo que prueba (5.4) para $x > 0$ con $g(x) = c_2(x+d)^2$ y $c_2 = 1-m/2(m+1)$.

Para $x < 0$, se obtiene (5.4), procediendo de forma análoga. ■

NOTAS.

i) La estimación (5.4) es más crítica que (5.1) en el sentido de que implica una tasa de decrecimiento para u , menor ó igual que $|x|^{-2/(1-m)}$, si $|x| \rightarrow \infty$.

ii) Observamos que (5.4) es exacta para la familia (0.2), de soluciones de tipo-fuente

$$w(x, t; c) = \left\{ \frac{t}{ct^{2/1+m} + \frac{1-m}{2(1+m)}|x|^2} \right\}^{\frac{1}{1-m}}$$

con $c \geq 0$, arbitraria.

El siguiente resultado es una forma integral de la desigualdad de Harnack, y mejora los lemas 2.2 y 2.3 del segundo capítulo. La probamos primero para $-1 < m < 0$.

LEMA 5.2.

Sea u una buena solución, y $\tau \in (0, T)$. Entonces, existe $c > 0$ tal que

$$(5.5) \quad \int_{-R}^R u(x, t) dx \leq C \left[\int_{-2R}^{2R} u(x, s) dx + R^{\frac{-(1+m)}{1-m}} |t - s|^{\frac{1}{1-m}} \right]$$

para todo $R > 0$ y $0 < s, t \leq \tau$.

DEMOSTRACIÓN:

Siguiendo los pasos del lema 2.2, multiplicamos (E) por una función $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\psi \geq 0$, e integramos, obteniendo

$$\frac{d}{dt} \int \psi(x) u(x, t) dx = \int \psi_{xx}(x) \frac{u^m(x, t)}{m} dx \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, \tau)$$

Si tomamos $n = -m \in (0, 1)$ y usamos la desigualdad de Holder

$$\left| \frac{d}{dt} \int \psi u(x, t) dx \right| \leq \frac{1}{n} \left(\int \psi u(x, s) dx \right)^n \left(\int \frac{|\psi_{xx}|^\beta u(x, t)^{2m\beta}}{\psi^{n\beta}} dx \right)^{1+m}$$

siendo $\beta = 1/1 + m$.

Llamando a la última integral $I(t)$ e integrando entre s y t :

$$(5.6) \quad \left(\int \psi(x) u(x, t) dx \right)^{1+m} \leq \left(\int \psi(x) u(x, s) dx \right)^{1+m} + c(m) \left| \int_s^t I(\tau)^{1+m} d\tau \right|$$

Para estimar $I(t)$, ponemos $\psi(x) = \psi_0(x/R)^k$ para $k \geq 2/(1+m)$, siendo ψ_0 la función de corte habitual, y utilizando (5.4) obtenemos

$$I(t)^{1+m} \leq c(m) t^{\frac{-2m}{m-1}} R^{m-1} g(2R)^{\frac{2m}{m-1}} \left(\int \frac{|(\psi_0^k)^n|^\beta}{\psi_0^{\beta n k}} dx \right)^{1+m}$$

Ahora, por la elección que hemos hecho de K , la última integral es finita y por (5.6) llegamos a

$$(5.7) \quad \left(\int \psi(x) u(x, t) dx \right)^{1+m} \leq \left(\int \psi(x) u(x, s) dx \right)^{1+m} + c(m) h(R) \left| t^{\frac{1+m}{1-m}} - s^{\frac{1+m}{1-m}} \right|,$$

con $h(R) = R^{m-1} g(R)^{\frac{2m}{m-1}} = O(R^{\frac{-(1+m)^2}{1-m}})$, si R es suficientemente grande.

Finalmente, (5.7) nos proporciona (5.5). ■

NOTAS.

1) Este resultado mejora el lema 2.3 del segundo capítulo, en el sentido de que (5.5) es válida para $s < t$ y $t < s$, mientras que la fórmula similar (2.5), es válida solamente para $t > s = 0$.

Desigualdades de Harnack similares son ciertas también para $0 < m < 1$, [25], pero no en el caso de difusión lenta $m > 1$, donde la condición $t < s$ es esencial, [3].

2) Para $R \approx 0$, $g(2R) \simeq c > 0$, y en vez de (5.5), obtenemos

$$\int_{-R}^R u(x, t) dx \leq C \left[\int_{-2R}^{2R} u(x, s) dx + R^{\frac{m-1}{1+m}} |t - s|^{\frac{1}{1-m}} \right]$$

3) Si tenemos dos buenas soluciones u_1, u_2 tales que $u_1 \geq u_2$ en una banda Q_T , obtenemos una versión mejorada del Lema 2.2, en la forma

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R (u_1(x, t) - u_2(x, t)) dx \leq C \left[\int_{-2R}^{2R} (u_1(x, s) - u_2(x, s)) dx \right. \\ \left. + R^{\frac{-(1+m)}{1-m}} |t - s|^{\frac{1}{1-m}} \right] \end{aligned}$$

válida para $R \geq 1, 0 < s, t \leq \tau < T$.

Ahora, establecemos la desigualdad de Harnack para $m = 0$.

LEMA 5.3.

Sea u , una buena solución de $u_t = (\log u)_{xx}$ en Q_T , y sean $0 < \tau < T$ y $0 < r < 1$. Existe una constante $C > 0$ tal que

$$(5.7) \quad \int_{-R}^R u(x, t) dx \leq C \left[\int_{-2R}^{2R} u(x, s) dx + R^{\frac{1}{r-1}} |t - s| \right]$$

para cada $R \geq 1$ y $0 < s, t \leq \tau$.

DEMOSTRACIÓN:

i) Supondremos en esta primera etapa que u es lisa hasta $t = 0$ y probaremos (5.7) para $R = 1, s = 0$ y $t = 1$.

Procediendo igual que en el lema anterior, obtenemos

$$(5.8) \quad \frac{d}{dt} \int \psi u(x, t) dx = \int \psi_{xx} \log u(x, t) dx$$

Ahora, utilizando que $\log z \leq c(z - 1)^r$ para $z \geq 1$, con $0 < r < 1$ y $c = c(r)$, el lado derecho de (5.8) se puede estimar por

$$C \int_{u>1} |\psi_{xx}| (u - 1)^r dx + c \int_{u<1} |\psi_{xx}| \left(\frac{1}{u} - 1\right)^r dx = I_1 + I_2$$

Si fijamos $\psi(x) = \psi_0(x)^k$ con $k \geq 2/1 - r$ y ψ_0 es la habitual función de corte, y tomamos $r < 1/3$, se tiene que

$$I_1 \leq C \left(\int \psi u(x, t) dx \right)^r \left(\int |\psi_{xx}|^q \psi^{-rq} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int \psi u(x, t) dx \right)^r$$

con $q = 1/(1 - r)$.

Por otra parte, utilizando (5.4) para estimar I_2 , tenemos

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \left(\int \psi u(x, t) dx \right)^r \left(\int |\psi_{xx}|^q \psi^{-rq} u^{-2q} dx \right)^{1-r} \leq \\ &C \left(\int \psi u(x, t) dx \right)^r t^{-2r} \left(\int |\psi_{xx}|^q \psi^{-rq} |x|^{-4q} dx \right)^{1-r} \leq \\ &C' \left(\int \psi u(x, t) dx \right)^r t^{-2r} \end{aligned}$$

con C dependiendo no solo de m y r sino también de $u(1, 1)$

Sustituyendo las estimaciones de I_1 e I_2 en (5.8)

$$\left| \frac{d}{dt} \int \psi u(x, t) dx \right| \leq \left(\int \psi u(x, t) dx \right)^r (c + c' t^{-2r})$$

y ahora integrando entre 0 y 1, obtenemos

$$(5.9) \quad \left| \left(\int \psi(x) u(x, 1) dx \right)^{1-r} - \left(\int \psi(x) u(x, 0) dx \right)^{1-r} \right| \leq C'$$

ii) En el caso general, supondremos que $0 < s_0 < t_0 < \tau$. Efectuando la transformación

$$\hat{u}(x, t) = \left(\frac{R^2}{t_1} \right) u(xR, t t_1 + s_0)$$

con $R > 1$ y $t_1 = t_0 - s_0$ que desplaza el origen de tiempo a s_0 , extiende el espacio y el tiempo, obtenemos una nueva solución \hat{u} de (E) definida en una banda $\mathbf{Q}_{\hat{T}}$, $\hat{T} = T/t_1$. Además, la cota superior $|x|^2/t$ de $1/u$ para $|x| \geq 1$, no crece bajo esta transformación.

Sustituyendo en (5.9) u por \hat{u} con $t = (t_0 - s_0)/R^2$, obtenemos para $y = xR$

$$\left| \left(\int \phi(y/R) u(y, t_0) dy \right)^{1-r} - \left(\int \phi(y/R) u(y, s_0) dx \right)^{1-r} \right| \leq c' |t_1/R|^{1-r}$$

de donde se sigue el resultado. ■

Estamos ya en condiciones de establecer que toda buena solución tiene una traza en $t = 0$.

TEOREMA 5.4.

Sea u , una buena solución de (E) en una banda $\mathbf{Q}_T, 0 < T \leq \infty$. Existe una única medida de Borel μ , no-negativa y localmente finita, tal que

$$(5.10) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int u(x, t) \phi(x) dx = \int \phi(x) d\mu,$$

para toda función test $\phi \in C_0(\mathbf{R})$.

DEMOSTRACIÓN:

Debido al lema 5.2 para $m < 0$ y al lema 5.3 para $m = 0$, la masa contenida en un intervalo finito

$$\int_{-R}^R u(x, t) dx, \quad \text{está acotada cuando } t \rightarrow 0.$$

Por tanto, existe una subsucesión $t_j \rightarrow 0$ tal que $u(\cdot, t_j)$ converge en la topología $\sigma(\mathcal{M}, C_0(\mathbf{R}))$ a una medida de Borel μ ; es decir (5.10) se verifica para $t = t_j \rightarrow 0$.

Veamos ahora que μ es única. Para ello, supongamos que para otra subsucesión $s_j \rightarrow 0$, obtuviéramos un segundo límite $\hat{\mu}$. Tomando en (5.7) una función de corte $\phi(x)$, $0 \leq \phi \leq 1$, tal que $\phi(x) = 1$ para $|x| \leq R$ y $\phi(x) = 0$ para $|x| \geq (1+\varepsilon)R$ con $|\phi_{xx}| \leq 1/\varepsilon^2 R^2$, tenemos que

$$(5.11) \quad \left(\int_{-R}^R u(x, t) dx \right)^{1+m} \leq \left(\int_{-R(1+\varepsilon)}^{R(1+\varepsilon)} u(x, s) dx \right)^{1+m} + \frac{CR^{\frac{-(1+m)^2}{1-m}}}{\varepsilon^2} |t - s|^{\frac{1+m}{1-m}}$$

Tomando $t = t_j, s = s_j$ y haciendo $t_j, s_j \rightarrow 0$, obtenemos

$$\int_{-R}^R d\mu \leq \int_{-R(1+\varepsilon)}^{R(1+\varepsilon)} d\hat{\mu}$$

Ahora, si $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{-R}^R d\mu \leq \int_{-R}^R d\hat{\mu}, \quad \forall R > 0$$

Por último, intercambiando en (5.11) el papel de s y t , encontramos que

$$\int_{-R}^R d\hat{\mu} \leq \int_{-R}^R d\mu, \quad \forall R > 0$$

En consecuencia $\mu = \hat{\mu}$.

La unicidad en el caso $m = 0$, se obtiene de forma análoga utilizando el lema 5.3. ■

Sección 2.

Estudiamos la existencia de una buena solución del Problema de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} u_t = (u^{m-1}u_x)_x \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

con $u_0 \in \mathcal{M}_+(\mathbf{R})$, conjunto de las medidas de Borel, no-negativas y localmente acotadas.

TEOREMA 5.5.

Existe una buena solución u de (PC) en $\mathbf{R} \times (0, \infty)$ tal que

$$(5.12) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int u(x, t) \varphi(x) dx = \int \varphi(x) d\mu, \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R})$$

DEMOSTRACIÓN:

Etapa 1. Supongamos que μ es una medida de Borel finita en \mathbf{R} .

Sean $\mu_n = \mu * \rho_n$, con $\rho_n(x) = \lambda \rho(n|x|)$ tal que $\rho \in C^\infty([0, \infty))$ tiene soporte en $[0, 1]$ y λ se elige de modo que $\int \rho_n dx = 1$. Entonces $\mu_n \rightarrow \mu$ en $\sigma(\mathcal{M}, C_0(\mathbf{R}))$, $\mu_n \in L^1(\mathbf{R})$ y $\int d\mu_n \leq \int d\mu$.

Si llamamos u_n a las correspondientes soluciones maximales con valores iniciales μ_n , estas soluciones tienen todas las propiedades que caracterizan a dichas soluciones. En particular $\{u_n\}$ está uniformemente acotada en $L^\infty(0, T; L^1(\mathbf{R}))$ y por tanto existe $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, $u \in L^\infty((0, T); L^1(\mathbf{R}))$ y

$$(5.13) \quad \int_{-R}^R u(x, t) dx \leq \int_{-2R}^{2R} d\mu + c_m R^{\frac{-\alpha}{\beta}} t^\alpha$$

Además, para cada $t \in (0, T)$ fijo

$$(5.14) \quad \left| \left(\frac{u_n^m}{m} \right)_x \right| \leq \int |u_{n,t}| dx \leq k \int \mu_n \leq K \int \mu$$

independiente de n , por lo que podemos pasar al límite $n \rightarrow \infty$ y (5.13) es válida para u .

Por otra parte, por la desigualdad de Harnack, $\int u(x, t) dx > 0$ lo que unido a (5.14) nos proporciona que en c.t.p $t > 0$, $u^m(x, t)$ es Lipschitz continua en x y $u(x, t)$ es positiva en \mathbf{R} . De nuevo, por (5.14) obtenemos la continuidad Holderiana en t , por lo que $u(x, t) > 0, \forall x \in \mathbf{R}, \forall t > 0$.

En consecuencia, concluimos que $u \in C^\infty(\mathbf{Q})$ y u es buena solución. Finalmente observamos que por el lema (5.1):

$$\int [u_n(x, t) - \mu_n(x)] \varphi(x) dx \leq \int_0^t \int \left| \frac{u_n^m}{m} \right| |\varphi_{xx}| dx dt \leq c(m, \varphi) t^{\frac{1}{1-m}}$$

Ahora, (5.12) se sigue haciendo $n \rightarrow \infty$ y después $t \rightarrow 0$.

Etapla 2. Sea μ una medida de Borel localmente finita en \mathbf{R} . Definimos $\mu_n = \mu\psi_n$ con $\psi_n \in C_0^\infty(R)$, decreciente y tal que $\psi_n(x) = 1$ si $|x| \leq n$. Entonces μ_n es una sucesión creciente de medidas finitas en \mathbf{R} tal que $\mu_n \rightarrow \mu$ en $\sigma(\mathcal{M}, C_0(R))$.

Sean u_n las correspondientes buenas soluciones construidas como en la etapa 1. Como, por (5.13), u_n están uniformemente acotadas en $L^\infty(0, T, L_{loc}^1(R))$, existe $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ y $u \in L^\infty((0, T); L_{loc}^1(R))$. Además, por ser el límite monótono, u es positiva y es una buena solución.

Observamos que al ser uniforme el límite en n , se siguen manteniendo para u las estimaciones

$$v_{xx} \geq -\frac{1}{(1+m)t} \quad y \quad -\frac{u}{(1-m)t} \leq u_t \leq \frac{u}{(1+m)t}$$

■

Sección 3.

Probamos ahora la unicidad de la solución construida en el Teorema 5.5. Para ello, serán fundamentales los lemas 5.1 y 5.2.

TEOREMA 5.6.

Sean u, \hat{u} dos buenas soluciones de (E) en Q_T , verificando que

$$(5.15) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int u(x, t) \varphi(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int \hat{u}(x, t) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0(R)$$

Entonces $u = \hat{u}$ en Q_T .

Antes de iniciar la demostración, probamos la siguiente versión del Principio del Máximo:

LEMA 5.7.

Sean u, v buenas soluciones de (E) en Q_T y supongamos que $\forall R > 0$

$$(5.16) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_{|x| \leq R} |u(x, t) - v(x, t)| dx = 0$$

Entonces $u = v$ en Q_T .

DEMOSTRACIÓN:

Debido a la regularidad de u y v , podemos aplicar la desigualdad de Kato, y obtenemos

$$(5.17) \quad \frac{\partial}{\partial t} |u - v| - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left| \frac{u^m}{m} - \frac{v^m}{m} \right| \leq 0$$

Sea $\psi \in C_0^\infty(R)$, $0 \leq \psi \leq 1$. Multiplicando (5.17) por ψ e integrando, se tiene

$$\frac{d}{dt} \left(\int \psi |u - v|(t) \right) \leq \int |\psi_{xx}| \frac{u^m}{m} - \frac{v^m}{m} (t) \leq$$

$$C \left[\int \psi |u - v|(t) \right]^{-m} \left[\int \frac{|\psi_{xx}|^{1/m+1} u^{m/1+m} v^{m/1+m}}{\psi^{-m/1+m}} \right]^{m+1}$$

Por tanto, integrando entre 0 y t , llegamos a una desigualdad del tipo (5.6), y procediendo igual deducimos

$$\int_{-R}^R |u - v|(t) \leq C \left[\int_{-2R}^{2R} |u - v|(0) + R^{\frac{1+m}{1-m}} t^{\frac{1}{1-m}} \right] \leq CR^{\frac{1+m}{1-m}} t^{\frac{1}{1-m}}$$

Ahora, el resultado se sigue, haciendo $R \rightarrow \infty$ para cada $t > 0$ fijo. ■

El siguiente lema demuestra que las soluciones de (PC) tales que $u(x, t) \geq \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$, son únicas.

LEMA 5.8.

Sean u, \hat{u} , soluciones de (E), verificando $u, \hat{u} \geq \varepsilon$ y supongamos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int u(x, t) \varphi(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int \hat{u}(x, t) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0(R)$$

Entonces u y \hat{u} deben coincidir.

DEMOSTRACIÓN:

Definimos $u_\varepsilon = u - \varepsilon$ y $\psi_\varepsilon(s) = \psi(s + \varepsilon) - \psi(\varepsilon)$, siendo $\psi(s) = s^m/m$.

Entonces $u_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon$, satisfacen:

$$(i) \quad (u_\varepsilon)_t = (\varphi_\varepsilon(u))_{xx}$$

$$(ii) \quad \varphi_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot, t)) \in L^1(R)$$

$$(iii) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int u_\varepsilon(x, t) \varphi(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int \hat{u}_\varepsilon(x, t) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0(R)$$

Podemos, por tanto, aplicar el resultado de unicidad de Pierre, [31], y $u_\varepsilon = \hat{u}_\varepsilon$, lo que nos implica $u = \hat{u}$.

■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5.6:

Dado que u es buena solución, por el Teorema 5.4, existe μ , medida de Borel localmente finita y tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int u(x, t) \varphi(x) dx = \int \varphi(x) d\mu, \quad \forall \varphi \in C_0(R)$$

Sea v_j la única solución maximal con dato inicial

$$\varepsilon + u(x, j^{-1})$$

Como consecuencia del lema 2.1, tenemos que

$$(5.19) \quad v_j(x, t) \geq \varepsilon \quad y \quad v_j(x, t) \geq u(x, t + j^{-1})$$

Debido al efecto regularizante, lema 2.3, $v_j(x, t)$ están localmente acotadas de modo uniforme, por lo que convergen uniformemente en conjuntos compactos de $(-R, R) \times (0, T)$ a una función $w(x, t)$ y w verifica

$$w(x, t) \geq \varepsilon \quad y \quad w(x, t) \geq u(x, t)$$

Veamos ahora que

$$(5.20) \quad \int w(x, t) \varphi(x) dx \rightarrow_{t \rightarrow 0} \int \varphi(x) (d\mu + \varepsilon dx), \quad \forall \varphi \in C_0(R)$$

Sea $h \in C_0^\infty(R)$ tal que $h(t) = 1$ si t próximo a 0, $h(t) = 0$ si $t > T/2$ y sean τ, s tales que $0 < \tau < T/2 < s < T$ y $h(\tau) = 1$. Entonces

$$- \int w(x, \tau) \varphi(x) dx = \int \int_\tau^s \left\{ \frac{w^m}{m} \psi_{xx} + w \psi_t \right\} dx dt$$

siendo $\psi(x, t) = \varphi(x) h(t)$.

Si denominamos

$$A_j(\rho) = \int \int_0^\rho \left\{ \frac{v_j^m}{m} \psi_{xx} + v_j \psi_t \right\} dx dt,$$

tenemos que

$$\int w(x, \tau) \varphi(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} (A_j(s) - A_j(\tau))$$

Puesto que

$$A_j(s) = - \int (u(x, j^{-1}) + \varepsilon) \varphi(x) dx \rightarrow_{j \rightarrow \infty} - \int \varphi(x) d\mu + \varepsilon \varphi(x) dx$$

se obtendrá (5.20) si $A_j(\tau) \rightarrow 0$, uniformemente en j , cuando $\tau \rightarrow 0$. Para ello, aplicando el lema 5.2:

$$\int_0^\tau \int_{-R}^R v_j(x, t) dx \leq C \int_0^\tau (\varepsilon R + \int_{-2R}^{2R} u(x, j^{-1}) dx + R^{\frac{-(1+m)}{1-m}} t^{\frac{1}{1-m}}) dt \leq C(\varepsilon, R) \tau^{\frac{2-m}{1-m}}$$

Por otra parte, por (5.19) y por ser u una buena solución:

$$\int_0^\tau \int_{-R}^R v_j^m(x, t) dx dt \leq \int_0^\tau \int_{-R}^R (u(x, t + j^{-1}))^m dx dt \leq C(m, R) \tau^{\frac{1}{1-m}}$$

Como consecuencia, tenemos que $A_j(\tau) \rightarrow 0$ uniformemente en j si $\tau \rightarrow 0$ y se obtiene (5.20).

En resumen, hemos llegado a que $w(x, t)$ es solución de (E) verificando $w(x, t) \geq \varepsilon$ y $\int w(x, t) \varphi(x) dx \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \int \varphi(x) d\mu$.

Por tanto, podemos aplicar el lema 5.8 a w , y w está unívocamente determinada por μ y ε ; denominamos $w = w(\mu, \varepsilon)$.

Sean ahora u, \hat{u} en las hipótesis del Teorema. Por la construcción anterior, tenemos

$$w = w(\varepsilon, \mu) = \hat{w}(\varepsilon, \hat{\mu}) = \hat{w}$$

Finalmente probamos que para $\varepsilon = 1/j$, $w_j = w(1/j, \mu)$ decrece a u , cuando $j \rightarrow \infty$: Como w_j es no creciente y por construcción se tiene que

$$w_j \geq w_{j+1} \geq u,$$

por lo que w_j converge a \hat{w} con $\hat{w} \geq u$.

Sea $\psi \geq 0$ y $\psi \in C(R)$, entonces

$$\begin{aligned} \int \varphi(x) d\mu &= \lim_{t \rightarrow 0} \int u(x, t) \varphi(x) dx \leq \lim_{t \rightarrow 0} \int \hat{w}(x, t) \varphi(x) dx \leq \\ &\liminf_{j \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow 0} \int w_j(x, t) \varphi(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int \varphi(x) (d\mu + \frac{1}{j} dx) = \\ &\int \varphi(x) d\mu \end{aligned}$$

Por tanto, \hat{w} y u tienen la misma traza μ , y como $\hat{w} \geq u$

$$\int_{-R}^R |u(x, t) - \hat{w}(x, t)| dx \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow 0, \forall R > 0.$$

Aplicando ahora el lema 5.7, llegamos a $u = \hat{w}$. ■

Terminamos el capítulo, probando que la buena solución es en efecto la única solución maximal de (PC). Entenderemos por una solución de (PC), una función $u \in C^\infty(Q_T)$, $u > 0$ y tal que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int u(x, t) \varphi(x) dx = \int \varphi(x) d\mu, \quad \forall \varphi \in C_0(R)$$

TEOREMA 5.9.

Para cada μ , medida de Borel localmente finita, existe una única solución maximal del problema (PC), caracterizada por la condición de decaimiento (5.1)

DEMOSTRACIÓN:

Sea u una solución con dato inicial μ . Para cada $\tau > 0$, sea $\mathcal{U}_\tau(x, t)$ la única solución maximal del problema con dato inicial $u(x, \tau)$, y por tanto $\mathcal{U}_\tau(x, t) \geq u(x, t + \tau)$. Por el lema 2.3, $\mathcal{U}_\tau(x, t)$ están acotadas de forma localmente uniforme, por lo que convergen en conjuntos compactos de $(-R, R) \times (0, T)$ a una función $\mathcal{U}(x, t)$, y se tiene

$$\mathcal{U}(x, t) \geq u(x, t), \quad \text{para } t > 0$$

Por otra parte, como para cada $\tau > 0$, $\mathcal{U}_\tau(x, t)$ satisface las estimaciones puntuales

$$-\frac{\mathcal{U}_\tau}{(1+m)t} \leq \mathcal{U}_{\tau,t} \leq \frac{\mathcal{U}_\tau}{(1-m)t}, \quad t > \tau$$

y

$$\mathcal{U}_{\tau,xx} \geq \frac{-1}{(1+m)t}, \quad t > \tau$$

si hacemos $\tau \rightarrow 0$, las mismas estimaciones se satisfacen para \mathcal{U} y por tanto \mathcal{U} es una buena solución.

Finalmente, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int \mathcal{U}(x, t) \varphi(x) dx = \int \varphi(x) d\mu, \quad \forall \varphi \in C_0(R)$$

de la misma forma que se obtuvo (5.20) en la demostración del Teorema 5.6.

REFERENCIAS

- [1] D.G. Aronson, *The porous medium equation*, in "Some Problems in Nonlinear Diffusion," (A. Fasano and M. Primicerio, Eds.), Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1986.
- [2] D.G. Aronson and Ph. B enilan, *Regularit  des solutions de l' quation des milieux poreux dans \mathbf{R}^N* , C. R. Acad. Sci. Paris **288** (1979), 103-105.
- [3] D.G. Aronson & L.A. Caffarelli, *The initial trace of a solution of the porous medium equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 351-366.
- [4] D.G. Aronson & J.L. Vazquez, *The porous medium equation as a finite-speed approximation to a Hamilton-Jacobi equation*, J. d'Analyse Nonlin aire (Ann. Inst. H. Poincar ) **4** (1987), 203-230.
- [5] G.I. Barenblatt, *On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium*, Prikl. Mat. Mekh. **16** (1952), 67-78 (in Russian).
- [6] Ph. B enilan, H. Br zis, M. G. Crandall, *A semilinear equation en $L^1(\mathbf{R}^N)$* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **4** (1975), 523-555.
- [7] Ph. B enilan, M.G. Crandall, *The continuous dependence on ϕ of the solutions of $u_t = \Delta\phi(u)$* , Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 161-177.
- [8] Ph. B enilan, M.G. Crandall, *Regularizing effects of homogeneous evolution equation*, Contributions to Analysis and Geometry, supplement of Amer. J. Math. (A.N. Clark et al. eds.), Baltimore (1981), 23-29.
- [9] Ph. B enilan, M.G. Crandall and M. Pierre, *Solutions of the porous medium equation in \mathbf{R}^N under optimal conditions on initial values*, Indiana Univ. Math. J. **33** (1984), 51-87.
- [10] J. G. Berryman, C. J. Holland, *Stability of the separable solution for fast diffusion*, Arch. Rat. Mech. Anal **74** (1980), 379-388.
- [11] J. G. Berryman, C. J. Holland, *Asymptotic behaviour of the nonlinear fast diffusion*, J. Math. Phys **23** (1982), 983-987.
- [12] M. Bertsch, R. Dal Paso, M. Ughi, *Non uniqueness of solutions of a degenerate parabolic equation*, preprint.
- [13] M. Bertsch, M. Ughi, *Positivity properties of viscosity solutions of a degenerate parabolic equation*, Preprint.
- [14] L.A. Caffarelli & A. Friedman, *Regularity of the free boundary of a gas flow in an n -dimensional porous medium*, Indiana Univ. Math **29** (1987), 361-391.
- [15] M. G. Crandall, L. C. Evans, *A singular semilinear equation en $L^1(\mathbf{R})$* , Trans. Amer. Math. Soc. **225** (1977), 145-153.
- [16] M. G. Crandall, T. MC. Liggett, *Generation of semigroups of nonlinear transformations in Banach spaces*, Amer. J. Math. **93** (1971), 265-293.
- [17] B.E.J. Dahlberg & C.E. Kenig, *Nonnegative solutions of the porous medium equation*, Comm. Partial Diff. Eq. **9** (1984), 409-437.
- [18] B. E. J. Dahlberg, C. E. Kenig, *Non-negative solutions to fast diffusions*, Aparecer  en Revista Matem tica Iberoamericana.


- [19] J.R. Esteban, A. Rodriguez & J. L. Vazquez, *A nonlinear heat equation with singular diffusivity*, Comm. Partial Diff. Eq. **13** (1988), 985-1039.
- [20] L. C. Evans, *Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space*, Israel. J. Math. **26** (1977).
- [21] S. Fisher, *Singular semilinear equations en $L^1(\mathbb{R})$* , Israel. J. Math. **28** (1977), 129-140.
- [22] A. Friedman and S. Kamin, *The asymptotic behaviour of gas in an n -dimensional porous medium*, Trans. Amer. Math. Soc. **262** (1981), 551-563.
- [23] M.A. Herrero, *A limit case in nonlinear diffusion*, Nonlinear Anal., to appear.
- [24] M.A. Herrero, *Singular diffusion on the line*, to appear.
- [25] M.A. Herrero and M. Pierre, *The Cauchy problem for $u_t = \Delta u^m$ when $0 < m < 1$* , Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), 145-158.
- [26] Y. Kobayashi, *Difference approximation of evolution equations and generation of nonlinear semigroups*, Pro. Japan. Acad **51** (1975), 406-410.
- [27] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov and N.N. Uralceva, "Linear and quasilinear equation of parabolic type," Translations of Math. monographs, AMS, 1968.
- [28] P. L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Research Notes in Math, Pitman, London **69** (1982).
- [29] O.A. Oleinik, A.S. Kalashnikov and Y.L. Czhou, *The Cauchy and boundary problems for equations of type of unsteady filtration*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **22** (1958), 687-704 (in Russian).
- [30] L.A. Peletier, *The porous medium equation*, in "Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences," (H. Amann et al., Eds.), Pitman, London, 1981, pp. 229-241.
- [31] M. Pierre, *Uniqueness of the solutions of $u_t = \Delta \phi(u)$ with initial datum a measure*, Nonlinear Analysis **6** (1982), 175-187.
- [32] G. Rosen, *Nonlinear heat equation in solid H_2* , Physical Review B **19** (1979), 2398-2399.
- [33] I. Rubinstein, L. Rubinstein, *Monotonic traveling waves in fast diffusion in ion exchanges*, Preprint.
- [34] P. Takác, *A fast diffusion equation which generates a monotone local semiflow*, Preprint.
- [35] J. L. Vazquez, *Behaviour of the velocity of one-dimensional flows in porous media*, Trans. Amer. Math. Soc. **286** (1984), 787-802.
- [36] Y. B. Zel'dovich & A. C. Kompanyets, *On the theory of heat conduction depending on temperature*, Lectures dedicated on the 70th anniversary of A. F. Joffe, Akad. Nauk SSSR, 1950, (in Russian).

Receido el 8 de mayo de 1984
de la Sección de Asesoramiento Jurídico
Declaración de Incompatibilidad

Apto para la Sección
Madrid, 22 - Junio - 84

Lucie C. Paul. ~~Spencer~~ ~~Shuman~~
 D. 1

Miguel Heredia

A large, stylized handwritten signature, likely "J. Edgar Hoover", is written across the middle of the page. The signature is written in dark ink and is somewhat cursive and overlapping.